Die projektive Erzeugung der Rotationsflächen zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Montag, den 13. März 1905, mittags $12^1/_2$ Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Gerhard Müth.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Opponenten:

Herr Dr. phil. **Albert Krusche,**

Herr cand. math. **Paul Gerlich.**

Breslau

Buchdruckerei H. Fleischmann

1905.

Dem Andenken meiner lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0139

Die vorliegende Arbeit ist eine teilweise Umarbeitung und Erweiterung meiner Bearbeitung der von der philosophischen Fakultät der Universität Breslau für das Jahr 1903 gestellten mathematischen Preisaufgabe, für welche ich den vollen Preis erhielt.

Der erste Teil enthält in der Hauptsache die Lösung der von Steiner[1]) im Anhang seiner „systematischen Entwicklung“ gestellten Aufgaben 10, 11, 12a; die erwähnte Erweiterung erstreckt sich auf den 2. Teil und besteht im wesentlichen in der Erzeugung der Rotationsflächen 2. Grades durch correlative Bündel und Felder aus solchen Punkten und Ebenen, welche auf dem Erzeugnis in allgemeiner Lage sind.

---

[1]) Jacob Steiners gesammelte Werke, Bd. 1, Nr. 19: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.“ Anhang.

§ 1.

Die Rotationsflächen 2. Grades (R^2) unterscheiden sich von den allgemeinen Flächen 2. Grades (F^2) dadurch, dass ihr unendlich ferner Kegelschnitt die absolute Kurve doppelt (in 2 Punkten) berührt. Singuläre R^2 sind der Kreis, der gerade Kreiskegel und, als Spezialfall des letzteren, der Rotationscylinder. Als Rotationscylinder zu betrachten ist auch derjenige parabolische Cylinder, der einen Punkt der absoluten Kurve zur Spitze und seine Tangente zur Berührungskante mit der unendlich fernen Ebene hat[1]).

Die vorliegenden Untersuchungen schliessen das Rotationsparaboloid aus. Die Arbeit knüpft an drei Aufgaben Steiners in dessen „Systematischen Entwickelung“[2]) an, wo gefordert wird: die Erzeugung des Kreises durch projektive Punktreihen (Aufg. 10), die des Rotationskegels durch projektive Strahlen- oder Ebenenbüschel (Aufg. 11) und die des „runden einfachen“ Hyperboloids durch projektive Ebenenbüschel oder Punktreihen (Aufg. 12a). Der Lösung dieser Aufgaben, bei denen es sich um projektive Gebilde 1. Stufe handelt, ist der erste Teil dieser Arbeit im wesentlichen gewidmet; der zweite Teil beschäftigt sich mit der Erzeugung der R^2 durch projektive Gebilde 2. Stufe: correlative Felder

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 4. Aufl., I. Teil, Nr. 120. Bernhard Eck, Ueber die Verteilung der Achsen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen. Diss. Münster 1890, S. 74.

[2]) Jakob Steiners gesammelte Werke, Bd. 1, Nr. 19: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“, Anhang.

und Bündel und betrachtet auch die R_2 als Basis eines räumlichen Polarsystems als projektiven Gebildes 3. Stufe.

Was den allgemeinen Gang der Untersuchungen anbelangt, so wird zunächst auf Grund der besonderen Merkmale der R^2 auf gegebenen Trägern eine projektive Zuordnung hergestellt, welche eine R^2 erzeugt, und dann wird, wenigstens für projektive Gebilde 1. Stufe, die umgekehrte Aufgabe gelöst, gegebene projektive Gebilde so zu legen, dass sie eine R^2 erzeugen. Ferner werden allgemein zunächst die ausgearteten R^2 erledigt, dann der allgemeine Fall. Endlich wird die Realität der Erzeugung und die Art des Erzeugnisses erörtert.

I. Die Erzeugung von Rotationsflächen 2. Grades durch projektive Gebilde 1. Stufe.

A. Kreis und Rotationscylinder.

§ 2.

Ein Kreis kann, wie jeder Kegelschnitt, sowohl durch 2 projektive Strahlenbüschel wie durch 2 projektive Punktreihen derselben Ebene erzeugt werden. Die erstere Art der Erzeugung ist sehr einfach und längst bekannt; nämlich:

„Zwei projektive Strahlenbüschel derselben Ebene erzeugen stets und nur dann einen Kreis, wenn sie gleich und gleichlaufend sind.“

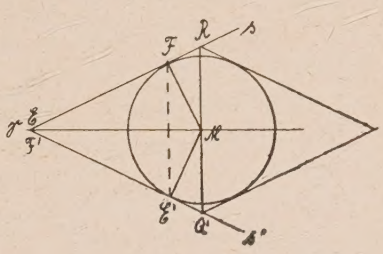
Damit ist zugleich die Unmöglichkeit ausgesprochen, 2 beliebig projektive Strahlenbüschel durch Lageveränderung zur Erzeugung eines Kreises zu zwingen.

Anders steht es mit der Erzeugung des Kreises durch projektive Punktreihen auf 2 Geraden s und s' derselben Ebene. Dieses Problem ist von Kramer[1]) gelöst worden, und da die Ausführungen des 1. Teils der Arbeit sich darauf begründen, so müssen wir hier nochmals darauf näher ein-

---

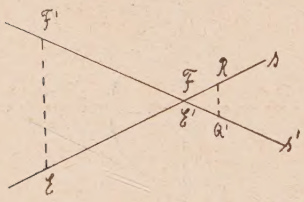
[1]) Kramer, „Auflösung der 10. Aufgabe im Anhang von Steiners systematischer Entwickelung etc.“ Crelles Journal Bd. 18, S. 185 bis 188.

gehen[1]). Die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf s und s' umhüllen den Kreis. Aus der allgemeinen Theorie der Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen wissen wir, dass s und s' selbst Tangenten des Erzeugnisses sind und dass dem Schnittpunkt ss', der $\mathfrak{S} \equiv E \equiv F'$ heisse, der Berührungspunkt E' von s' bezw. F von s mit dem Kreise entspricht. Da das Erzeugnis ein Kreis sein soll, so ist $EF = E'F'$, in S sind also nicht entsprechende Endpunkte entsprechender gleicher Strecken vereinigt. Legen wir an den Kreis die zu s und s' parallelen Tangenten, so verbinden diese auch je 2 entsprechende Punkte, und zwar ist beide Male der eine unendlich fern, der andere also der Fluchtpunkt der im Endlichen geschnittenen Punktreihe. Wir erhalten so die den unendlich fernen Punkten R'_∞ und Q_∞ von s' und s entsprechenden Fluchtpunkte R auf s und Q' auf s', und die Figur zeigt, dass sie in den Staudtschen Strecken E.F und E'.F' liegen, also von EF, bezw. E'F' ausgeschlossen werden. In zwei projektiven Punktreihen gibt es nun 2 Systeme entsprechender gleicher Strecken; die Strecken des einen Systems schliessen die Fluchtpunkte aus, die des anderen schliessen sie ein. EF und E'F' gehören also dem ersten System an. Zugleich bemerken wir, dass E und F' die weiter von R bezw. Q' entfernten Endpunkte sind. Daraus folgt schon vermöge der projektiven Beziehung, dass sie nicht entsprechend sind. Denn sind EF und E'F' entsprechende gleiche Strecken, so ist $ER = F'Q'$ und $FR = E'Q'$, und ist E weiter von R entfernt als F, so ist auch F' weiter von Q' entfernt als E'. Die weiter von den Fluchtpunkten entfernten (wie die ihnen näher liegenden Endpunkte natürlich auch) sind also sicher nicht entsprechend, das eine zieht



[1]) S. auch: Steiner-Schroeter, „Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften", 3. Auflage, § 24.

das andere nach sich. — Dass bei der Vereinigung der den Fluchtpunkten näher gelegenen Endpunkte sicher kein Kreis entsteht, kann man aus der Figur ablesen. Nach Steiner-Schroeters Vorlesungen[1]) nämlich ist entscheidend über die Art des Erzeugnisses die Lage derjenigen Geraden, welche die dem Trägerschnittpunkt entsprechenden Punkte verbindet. Das Erzeugnis ist demnach Ellipse oder Hyperbel, je nachdem diese Gerade zwischen den Trägerschnittpunkt und die Verbindungslinie der Fluchtpunkte fällt oder ausserhalb. Bei der Vereinigung von E und F' tritt das erstere ein, es entsteht als spezielle Ellipse ein Kreis; der 2. Fall tritt ein, wenn man F und E' vereinigt, es entsteht also in diesem Falle ein Hyperbel[2]).



Kehren wir zu der Figur zurück! Die 4 Tangenten, die wir haben, bilden einen dem Kreise umgeschriebenen Rhombus; dessen eine Diagonale ist RQ', die Mitte von RQ' ist das Centrum M des Kreises, M$\mathfrak{S}$ ist die zweite Diagonale, auf RQ' senkrecht und Halbierungslinie des Winkels (s,s'). M ist zugleich Schnittpunkt der in F und E' auf s und s' errichteten Lote. Wir erhalten nun folgende Konstruktion einer einen Kreis erzeugenden Projektivität auf den festen Geraden s und s':

„Dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{S} \equiv E \equiv F'$ lässt man 2 Punkte E' und F entsprechen, die von $\mathfrak{S}$ denselben Abstand haben. Man errichtet in F und E' auf s und s' die Lote, schneidet sie in M und errichtet auf M$\mathfrak{S}$ in M die Senkrechte. Deren Schnittpunkt mit einer der Geraden, etwa s, macht man zum Fluchtpunkt R auf dieser."

Damit ist eine Projektivität festgelegt, da wir 3 Paare: E, F, R und E', F', R'_∞ entsprechender Punkte besitzen.

---

[1]) Steiner-Schroeter, Theorie der Kegelschnitte, 3. Auflage, S. 112.

[2]) Hier ist E'F bezw. EF' zu RQ' parallel.

Die Zuordnung R, R'_∞ macht von selbst den Schnitt der Senkrechten in M auf $\mathfrak{S}M$ mit s' zum Fluchtpunkt Q' auf s', es entsteht also beide Male dieselbe Projektivität. Denn da EF und E'F' gleiche entsprechende Strecken sind, so gilt, wenn R und Q_1' die Fluchtpunkte sind, $RE = Q'_1 F'$. Konstruiert man demgemäss Q'_1 auf s', so erkennt man aus der Kongruenz der Dreiecke $\mathfrak{S}MR$ und $\mathfrak{S}MQ'_1$, dass die Winkel bei M gleich sind, mithin, da $\sphericalangle \mathfrak{S}MR = 90^0$ nach Konstruktion ist, dass RMQ'_1 eine gerade Linie ist, d. h. Q'_1 mit Q' identisch und Q' Fluchtpunkt. Folglich ist $ER = F'Q'$ und $MR = MQ'$, und wenn man durch R und Q' zu s' und s die Parallelen zieht, so entsteht ein Rhombus. Schreibt man diesem einen Kreis ein, so liegt sein Mittelpunkt in der Mitte von RQ' und ist M, also berührt er s und s' in F und E'; er ruft daher auf s und s' eine Projektivität hervor, in der E und E', F und F', R und R'_∞ (und Q_∞ und Q') entsprechend sind, die also mit der durch unsere Konstruktion erhaltenen identisch ist; mithin erzeugt diese in der Tat einen Kreis.

§ 3.

Aus obigen Betrachtungen folgt nun unmittelbar die Lösung der umgekehrten Aufgabe: zwei gegebene projektive Punktreihen s und s' so zu legen, dass sie einen Kreis erzeugen:

„Von 2 gleichen entsprechenden, die Fluchtpunkte R und Q' ausschliessenden Strecken EF und E'F' der beiden Punktreihen vereinigt man die weiter von den Fluchtpunkten entfernten Endpunkte, die E und F' seien, in $\mathfrak{S}$ und dreht, s festhaltend, s' so lange um $\mathfrak{S}$, bis die Gerade, welche in dem Schnittpunkt M der in E' und F auf s' und s errichteten Lote auf $M\mathfrak{S}$ senkrecht steht, durch den einen Fluchtpunkt geht."

Wir wissen schon, sie geht dann von selbst durch den anderen.

Beachten wir, dass $\sphericalangle EMR = 90^0$ ist, so können wir obige Konstruktion folgendermassen umformen, wodurch sie noch geeigneter wird für die wirkliche Ausführung:

„Wir legen s fest und stellen (unter den vorhin gemachten Voraussetzungen über EF und E'F') über ER einen rechten Winkel, dessen Scheitel M auf dem in F auf s errichteten Lote liegt. Alsdann legen wir F' in E und drehen s' um E, bis E' und F bezüglich ME symmetrisch werden."

Die Konstruktion des rechten Winkels wird erreicht mit Hilfe des Kreises über ER als Durchmesser; sie liefert 2 Punkte M, die beide brauchbar, doch nicht wesentlich unterschieden sind.

Zwei weitere Konstruktionen, von denen wir nur die zweite ableiten, seien noch erwähnt[1]): Nachdem man E und F' in $\mathfrak{S}$ vereinigt hat, dreht man s' so um $\mathfrak{S}$, 1) bis das Quadrat des halben Abstands der Fluchtpunkte gleich der Potenz der Projektivität ist, oder 2) bis der Winkel $\varphi = (s,s')$ der Gleichung genügt

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{RF}{Q'F'} = \frac{RF}{\mathfrak{S}R}.$$

Diese Formel erhält man leicht aus der Figur. Es ist nämlich in dem rechtwinkeligen Dreieck EMR

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MR}{\mathfrak{S}R},$$

in dem rechtw. Dreieck MFR, da

$$\sphericalangle FMR = \frac{\varphi}{2} \text{ ist,}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{FR}{MR},$$

also

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{FR}{MR} \cdot \frac{MR}{\mathfrak{S}R} = \frac{FR}{\mathfrak{S}R} = \frac{RF}{Q'F'}.$$

[1]) Steiner-Schroeter, Theorie der Kegelschnitte, 1. und 2. Aufl., § 24.

Ähnlich ist

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{EF}{ME} \text{ und } = \frac{EM}{ER},$$

also

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{EF}{ER}.$$

Beiden Konstruktionen werden wir die geometrische vorziehen; auf die trigonometrisch formulierte kommen wir bei Gelegenheit des Rotationskegels zurück. Wir bemerken noch zum Schluss, dass unsere Konstruktion stets reell ausführbar ist, weil F zwischen E und R liegt, also das Lot in F auf s den Kreis über ER stets reell schneidet.

§ 4.

Die vorangehenden Betrachtungen für den Kreis lassen sich unmittelbar auf den Rotationscylinder übertragen, indem wir uns diesen durch Parallelprojektion in der zur Kreisebene senkrechten Richtung aus dem Kreise entstanden denken können. So gilt:

„Zwei projektive Ebenenbüschel um parallele Axen erzeugen stets und nur dann einen Rotationscylinder, wenn sie gleich und gleichlaufend sind."

Ferner kann man in folgender Weise 2 Parallelstrahlenbüschel σ und σ', die einen gemeinsamen Strahl $\mathfrak{f}$ besitzen, so projektiv machen, dass sie einen Rotationscylinder erzeugen:

„Dem gemeinsamen Strahl $\mathfrak{f} \equiv e \equiv f'$ lässt man 2 Strahlen e' und f entsprechen, die gleichweit von ihm entfernt sind, und macht die Schnittlinie r derjenigen Ebene mit σ, die in dem Schnittstrahl m der in f und e' auf σ und σ' normalen Ebenen auf m $\mathfrak{f}$ senkrecht steht, zum Fluchtstrahl in σ."

Umgekehrt:

„Sollen 2 gegebene projektive Parallelstrahlenbüschel einen Rotationscylinder erzeugen, so nimmt man aus demjenigen System entsprechender deckbarer Strahlenpaare,

dessen Paare die Fluchtstrahlen r und q' ausschliessen, 2 entsprechende Paare e f und e' f' heraus, stellt über r e, e weiter von r als f annehmend, einen rechten Flächenwinkel so, dass seine Scheitellinie m in die Normalebene in f auf σ fällt, und legt den Büschel σ' so, dass f' in e fällt und e' zu f bezüglich ∫m symmetrisch liegt."

Die Konstruktion des rechten Flächenwinkels gelingt mit Hilfe eines über e und r als diametralen Kanten errichteten Rotationscylinders, den man sich auch dadurch erzeugt denken kann, dass man die Ebenenbüschel um r und e so projektiv macht, dass jeder Ebene des einen die dazu senkrechte des anderen entspricht.

B. Der Rotationskegel.

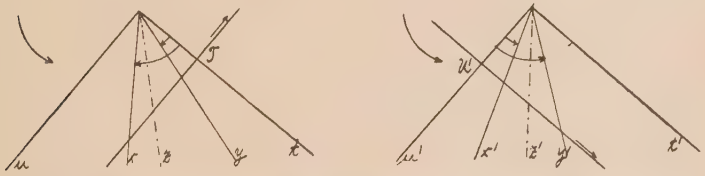
1. Erzeugung durch 2 projektive Strahlenbüschel eines Bündels.

§ 5.

Der Kegel 2. Ordnung hat 2 Erzeugungsweisen durch projektive Gebilde 1. Stufe: er kann erzeugt werden durch 2 projektive Strahlenbüschel oder durch 2 projektive Ebenenbüschel desselben Bündels. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Erzeugung durch 2 projektive Strahlenbüschel in den Ebenen σ und σ' mit demselben Scheitel S. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen umhüllen das Erzeugnis, die Büschelebenen σ und σ' gehören selbst zu den Tangentialebenen und berühren in den ihrem gemeinsamen Strahl ∫ ≡ e ≡ f' entsprechenden Strahlen e' bezw. f. Ist das Erzeugnis Rotationskegel, so bildet ∫ mit e und f' gleiche Winkel, es ist $\sphericalangle$ (e,f) = (e',f'), und diese beiden Winkel gehören somit zu dem einen der beiden Systeme entsprechender gleicher Winkel, welche die beiden projektiven Strahlenbüschel besitzen. Diese beiden Systeme unterscheiden sich nach ihrem Verhalten zu dem (einzig vorhandenen) Paar entsprechender rechter Winkel: die Schenkel der entsprechenden gleichen Winkel liegen je zu denen der entsprechenden rechten Winkel elliptisch in dem einen, hyperbolisch in dem anderen System. Da uns aber unsere Figur die entsprechen-

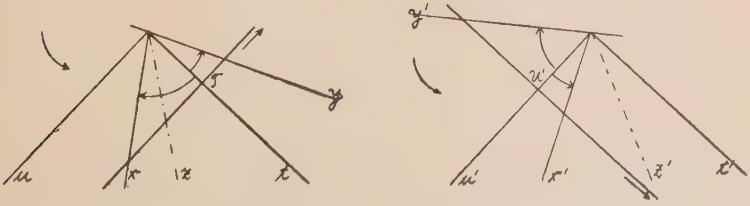
den rechten Winkel nicht liefert, so ist es wertvoll, dass es noch eine andere, für unsere Zwecke geeignetere Art der Unterscheidung gibt, auf die wir nun, den Rotationskegel einen Augenblick verlassend, eingehen [1]).

Es liegen 2 projektive Strahlenbüschel vor, jedes mit einem bestimmten Drehsinn; die entsprechenden rechten Winkel seien (u, t) und (u', t'). Zu einem beliebigen Strahl x des ersten Büschels konstruieren wir einen zweiten y' gemäss der Gleichung $\sphericalangle$ (u', y') = — (t, x); dann erhalten wir mit Hinzunahme der dem x und y' entsprechenden Strahlen x' und y in (x, y) und (x', y') ein paar entsprechender gleicher Winkel. Es ist dann $\sphericalangle$ (u', x') = — (t, y), und die Strahlenpaare x, y und x', y' liegen hyperbolisch zu u, t, bezw. u', t'.



Nehmen wir nun einen Strahl z zwischen den Schenkeln des spitzen Winkels (x, y) an, so wird sein entsprechender z' im spitzen Winkel (x', y') liegen, da der Reihenfolge u x z y t die Folge u' x' z' y' t' entsprechen muss. z und z' liegen also beide in entsprechenden gleichen Winkeln.

Nun gehen wir von demselben Strahl x aus und stellen uns y' her gemäss der Gleichung $\sphericalangle$ (u' y') = + (t, x). Dann bilden (x, y) und (x', y') ein Paar entsprechender gleicher Winkel mit elliptischer Lage ihrer Schenkel gegen die Paare u, t und u', t'.



[1]) Den Hinweis darauf verdanke ich Herrn Professor Sturm.

Liegt nun z etwa im stumpfen Winkel (x, y), so liegt diesmal z', da der Reihenfolge u x z t y die Folge u' x' z' t' y' entsprechen muss, im spitzen Winkel (x', y'), also im supplementären.

Bezeichnen wir daher als „entsprechend im engeren Sinne" solche Winkel, in denen weitere entsprechende Strahlen liegen, so haben wir bei 2 projektiven Strahlenbüscheln

„ein System gleicher und ein System supplementärer im engeren Sinne entsprechender Winkel; die Winkel des ersten Systems liegen zu den entsprechenden rechten Winkeln hyperbolisch, die des zweiten elliptisch".

Bei dieser Gelegenheit können wir uns leicht überzeugen, dass für projektive Punktreihen ähnliche Verhältnisse vorliegen, indem wir den ersten Strahlenbüschel mit einer Senkrechten zu t, den zweiten mit einer Normalen zu u' schneiden, so dass die beiden Schnittgeraden denselben Abstand von den Büschelscheiteln haben. Bezeichnen wir die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Strahlen des betreffenden Büschels durch die entsprechenden grossen Buchstaben, so erkennt man leicht, dass T und U' die Fluchtpunkte werden und dass entsprechende gleiche Winkel mit ihren Schenkeln entsprechende gleiche Strecken ausschneiden, indem kongruente Dreiecke entstehen mit den Büschelscheiteln als Spitzen. Die Betrachtung der Figuren liefert sofort das Ergebnis:

„In 2 projektiven Punktreihen gibt es 2 Systeme gleicher Strecken zwischen entsprechenden Punkten. Bei dem einen System tragen die gleichen Strecken auch entsprechende Punkte (sind im „engeren Sinne" entsprechend), bei dem anderen nicht. Die Strecken des ersten Systems schliessen die Fluchtpunkte aus, die des zweiten schliessen sie ein."

Bei den den Kreis erzeugenden projektiven Punktreihen (§§ 2 und 3) haben wir es offenbar mit dem ersten System auch nach der neuen Unterscheidung zu tun, indem alle Tangenten, die in Punkten des kleineren Bogens E'F berühren,

in s und s' entsprechende Punkte einschneiden, die in den Strecken EF und E'F' selbst liegen. Doch war dort die Unterscheidung nach dem Verhalten zu den Fluchtpunkten geeigneter.

§ 6.

Für unseren Rotationskegel gibt uns das neu gewonnene Kennzeichen sofort das Resultat, dass (e, f) und (e', f') zu dem System im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel gehören, denn alle Tangentialebenen längs der Kanten auf dem kleineren durch f und e' begrenzten Stück der Mantelfläche verbinden entsprechende Strahlen, die in den gleichen Winkeln (e, f) und (e', f') selbst liegen.

Denken wir uns nun zu σ und σ' die diametral gegenüberliegenden Tangentialebenen unseres Rotationskegels, τ und τ', so ist σ σ' τ τ' ein ihn umhüllendes einfaches Vierflach, dessen Diagonalebenen aufeinander senkrecht stehen und sich in der Achse m des Kegels schneiden.

Die eine Diagonalebene ist $(\int m) = \mu$, die andere ist senkrecht dazu in m und verbindet die Schnittstrahlen $(\sigma, \tau') = r$ und $(\sigma', \tau) = q'$. Bleiben wir bei r, so können wir r auch eingeschnitten denken von der Normalebene auf $\mu = (\int m)$ in m, die Achse m aber ist nach bekannten Eigenschaften des geraden Kreiskegels die Schnittlinie der Normalebenen in f und e' auf σ und σ'. Die Ebene μ ist Symmetrieebene des Kegels.

Die τ' schnitt in σ den Strahl r ein; der von τ' in σ' eingeschnittene Strahl ist der dem r entsprechende und daher mit r' zu bezeichnen. Nun gilt aber: Wenn man 2 diametrale Tangentialebenen eines Rotationskegels (σ' und τ') mit einander schneidet, so ist ihre Schnittlinie (r') senkrecht sowohl zu der Achse m des Kegels, als auch zu jeder der Berührungskanten. Das Letztere ist vorläufig für uns wichtiger, r' ist also senkrecht zu e', denn e' ist ja Berührungskante von σ'. Dem vorhin seiner Entstehung nach erörterten Strahl r muss also der zu e' senkrechte Strahl in σ' entsprechen. Demnach gestaltet sich die Herstellung einer einen Rotations-

kegel liefernden Projektivität zwischen 2 konzentrischen Büscheln in festen Ebenen σ und σ′ folgendermassen:

„Man ordnet dem gemeinsamen Strahl ∫ — e — f′ zwei Strahlen e′ bezw. f zu, die gleich gegen ihn geneigt sind, errichtet in f und e′ auf σ und σ′ die Normalebenen, schneidet sie in m und errichtet auf der Ebene μ = (∫m) die Normalebene ν; demjenigen Strahl r, den letztere in σ einschneidet, ordnet man in σ′ den zu e′ senkrechten Strahl r′ zu.“

In der so festgelegten Projektivität entsprechen sich dann von selbst der Schnittstrahl q′ von ν mit σ′ und der auf f senkrechte Strahl q in σ. Denn die 4 Strahlen e, f, r, q in σ liegen bezüglich μ symmetrisch zu f′, e′, q′, r′ in σ′. Folglich ist

(e, f, r, q) $\overline{\wedge}$ (f′, e′, q′, r′), und das ist $\overline{\wedge}$ (e′, f′, r′, q′).

Nun sind aber e, e′; f, f′; r, r′ entsprechende Strahlen unserer oben hergestellten Projektivität. also auch q und q′.

Nun kommen wir zu dem Beweis, dass unsere Konstruktion uns wirklich zu einem Rotationskegel geführt hat.

§ 7.

Zu dem Zwecke stellen wir uns einen Rotationskegel her, der σ und σ′ längs f bezw. e′ berührt. Da f und e′ mit ∫ denselben Winkel bilden, ist ein solcher Kegel möglich. Betrachten wir die Projektivität, die er in den Büscheln σ und σ′ hervorruft. Zunächst wird den Berührungskanten f und e′ der Schnittstrahl σ σ′ = ∫ als f′ bezw. e zugeordnet. Achse des Kegels wird der Schnittstrahl m der Normalebenen in f und e′ auf σ und σ′. Konstruieren wir die zu σ und σ′ diametralen Berührungsebenen τ und τ′, so hat das einfache Vierflach σ σ′ τ τ′ folgende Eigenschaften: Es ist dem Rotationskegel umgeschrieben, sein Schnitt mit einer zur Achse m senkrechten Ebene ist ein Rhombus, seine Diagonalebenen stehen in m auf einander senkrecht; die eine ist also unsere μ, die andere verbindet die Schnittstrahlen σ τ′ und σ′ τ, und wir sehen, σ τ′ ist unser r. Ferner schneiden die Ebenen (f m) und (e′ m), da nach den Berührungskanten

von σ und σ' gehend, auch die von τ und τ' ein, und auf (e' m) stehen sowohl σ' wie τ' senkrecht, daher ihre Schnittlinie $\sigma' \tau'$. Diese steht daher auch auf dem in (e' m) gelegenen Strahl e' senkrecht und ist unser Strahl r'. Mithin schneidet die Tangentialebene τ' in σ und σ' die Strahlen r und r' ein, d. h. diese sind auch in der durch den Rotationskegel hervorgerufenen Projektivität entsprechend.

Wir fanden bereits e und e', f und f' in ihr zugeordnet, also hat sie mit der im vorigen § hergestellten 3 Paare gemein, ist mit ihr identisch, also auch ihr Erzeugnis mit dem jener, d. h. unsere in § 6 hergestellte Projektivität liefert wirklich einen Rotationskegel.

§ 8.

Wir kommen nun wieder zu der umgekehrten Frage, wie 2 gegebene projektive Strahlenbüschel gelegt werden müssen, damit sie einen Rotationskegel erzeugen. Wir nehmen an, die beiden Büschel liegen schon konzentrisch in den Ebenen σ und σ'; dann liefert uns die vorangehende Betrachtung folgende Konstruktion:

„Aus dem System im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel nimmt man ein Paar (e, f) und (e', f') heraus, vereinigt 2 nicht entsprechende Strahlen e und f' in $\mathfrak{f}$ und dreht den 2. Büschel so lange um $\mathfrak{f}$, bis die auf der Verbindungsebene $(\mathfrak{f}\ m) = \mu$ in dem durch Schnitt der Normalebenen in f und e' auf σ und σ' erhaltenen Strahle m senkrechte Ebene in σ (σ') einen Strahl r (q') einschneidet, dessen zugeordneter r' (q) in σ' (σ) auf f (e') senkrecht steht."

Wir wissen bereits, dass das Entsprechen von r, r' und q, q' sich gegenseitig bedingt. Eine noch anschaulichere Konstruktion erhalten wir, wenn wir beachten, dass m die Scheitellinie eines rechten Flächenwinkels ist, der über dem Geradenpaar e, r steht. Die Konstruktion gestaltet sich dann folgendermassen:

„Wir suchen ein Paar im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel auf, (e, f) und (e', f'), und denjenigen Strahl r in σ, der dem zu e' senkrechten Strahl r' von σ' entspricht.

Alsdann stellen wir einen rechten Flächenwinkel so über e, r, dass seine Scheitellinie m in der Normalebene in f auf σ liegt, vereinigen f' mit e und drehen σ' so um e $\equiv$ f', dass e' und f symmetrisch zu liegen kommen in Bezug auf die Ebene e m $= \mu$ des rechten Flächenwinkels.“

Die Herstellung des rechten Flächenwinkels lässt 2 Lösungen zu. Die Scheitellinien aller über e, r zu stellenden rechten Flächenwinkel bilden nämlich einen orthogonalen Kegel [1]), den man erhält, wenn man jeder Ebene durch e die zu ihr normale durch r zuordnet und entsprechende Ebenen schneidet. Jede der beiden Schnittlinien dieses Kegels 2. Ordnung mit der in f auf σ errichteten Normalebene liefert einen Strahl m. Nun brauchen aber diese Schnittlinien durchaus nicht immer reell zu sein, infolgedessen auch die angegebene Konstruktion; durch passende Wahl der entsprechenden gleichen Winkel (e, f) und (e', f') aber können wir reelle Schnittlinien m herbeiführen. Unser orthogonaler Hilfskegel hat die Ebene (e r) zur Symmetrieebene, die in e und r auf (e r) senkrechten Ebenen sind seine Tangentialebenen in e und r. Projizieren wir die Kanten auf die Ebene (e r), so fallen stets die Projektionen in den spitzen Winkel (e, r), und daraus sehen wir, dass f in diesem liegen muss, falls die Normalebene in f auf (e r) den Kegel reell schneiden soll. Infolgedessen muss r im stumpfen Winkel (e, f) liegen, und das stimmt auch mit dem von der Projektivität allein schon Geforderten überein. Da nämlich r' zu e' normal ist, liegt r' sicher im stumpfen Winkel (e', f'), und da (e, f) und (e', f') im engeren Sinne entsprechende gleiche Winkel sind, so muss schon deswegen r in den stumpfen Winkel (e, f) fallen. Damit braucht aber noch keineswegs f im spitzen Winkel (e, r) zu liegen, wie man sofort einsieht. Wir können also sagen:

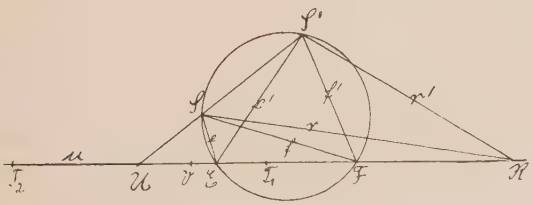
„Um die richtige Lagerung der gegebenen projektiven Strahlenbüschel reell ausführen zu können, muss man die im engeren Sinne entsprechenden gleichen Winkel (e, f)

[1]) Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung, § 25.

und (e', f') so wählen, dass f in den spitzen Winkel (e, r) fällt."

§ 9.

Wir können zur Auffindung der richtigen entsprechenden gleichen Winkel eine einfache Konstruktion angeben. Zu dem Zweck legen wir die beiden Büschel S und S' in dieselbe Ebene und machen sie perspektiv, am einfachsten durch Ineinanderlegen zweier entsprechender Strahlen. Als perspektiver Durchschnitt ergibt sich eine Gerade u. Der sich selbst entsprechende Strahl S S' schneide u in U, S liege näher an U als S'. Nun legen wir durch S und S' einen beliebigen Kreis[1]) und ziehen von S bezw. S' nach seinen Schnittpunkten E und F (E liege näher an U) mit u die Strahlen e, f und e', f'. Alsdann sind die Winkel (e, f) und (e', f') gleich als Centriwinkel über demselben Bogen, und sind im engeren Sinne entsprechende Winkel, da e und e', f und f' sich auf u schneiden und in den beiden Winkeln noch weitere sich auf u treffende, also entsprechende Strahlen liegen. Dem in S' auf e' senkrechten Strahl r' entspricht der nach seinem Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ mit u gehende Strahl r durch S, und der Kreis muss nun so gewählt werden, dass f in den spitzen Winkel (e, r) fällt, wie es für die Realität der gefundenen Konstruktion erforderlich ist. Das können wir aber durch passende Wahl von E erreichen.



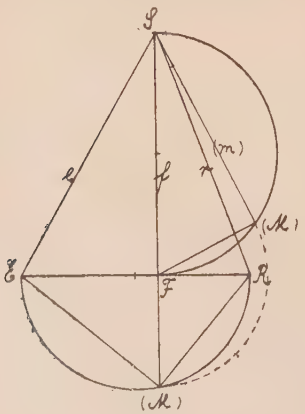
Durch S und S' gibt es zwei Kreise, die u berühren. Die Berührungspunkte seien T_1 und T_2; dann ist $UT_1^2 = UT_2^2 = US$. US', und UT_1 und UT_2 sind einfach herstellbar. Geht der Kreis durch T_1 oder T_2, so fallen E und F nach T_1 bezw. T_2 zusammen. Da wir nun E näher an U voraussetzen als F, so muss zunächst E zwischen T_1 und T_2 gewählt werden, falls f, wie erforder-

[1]) Steiner-Schroeter, Kegelschnitte, 3. Auflage. S. 38.

lich, in den spitzen Winkel (e, r) fallen soll. Diese Bedingung der Lagerung von E ist aber auch hinreichend, wie man auch E zwischen T_1 und T_2 lege, r befindet sich stets in der richtigen Lage. Kommt z. B. E nach U, so fallen e und e' zusammen nach SS', F wird unendlich fern, f und f' werden zu u parallel, r hat die richtige Lage. Unter den Lagen von E ist noch diejenige V ausgezeichnet, bei welcher u Durchmesser des Kreises wird. Alsdann sind die Winkel (e, f) und (e', f') rechte und r' fällt in f', $\mathfrak{R}$ auf den Kreis; aber auch beim Ueberschreiten von V ändert sich an der richtigen Lage von r nichts. Wir haben also das Ergebnis,

„Der Punkt E muss zwischen T_1 und T_2 gewählt werden."

Wir stellten die Achse m des Kegels mit Hilfe eines rechten Flächenwinkels her. Statt dessen können wir folgendermassen verfahren: „Denken wir uns die Figur mit einer zu m senkrechten Ebene π geschnitten und mit E, F, R, M die Spurpunkte von e, f, r, m bezeichnet, so ist $\sphericalangle SFE = 90^0$, denn F M ist Projektion von S F auf π und E F ist auf F M senkrecht, da E F Tangente in F, F M Durchmesser des Schnittkreises von π ist. Daher ist auch Δ E F M rechtwinklig bei F, ferner sind ersichtlich Δ S M F und Δ E M R rechtwinklig bei M. m liegt in der Normalebene in f auf σ. Wir denken uns nun zunächst π um E R in σ umgeklappt und erhalten dann die Umklappung von M, indem wir über E R als Durchmesser den Halbkreis schlagen und ihn mit f zum Schnitt bringen. Trägt man nun F M von F aus in den über S F als Durchmesser geschlagenen Halbkreis als Sehne ein, so ist die Sehne von S nach dem Endpunkte die Umklappung von m, und m selbst wird erhalten, indem man das Dreieck S M F um S F in die auf σ in f normale Ebene umklappt.



Wir wollen noch kurz auf die trigonometrische Lösung der Aufgabe, die gegebenen projek-

tiven Strahlenbüschel richtig zu lagern, eingehen. Bei der geometrischen Konstruktion haben wir zwei körperliche Ecken e f m und e r m mit der gemeinsamen Spitze S und den gemeinsamen Kanten e und m erhalten, und zwar ist der Flächenwinkel an der Kante e beiden gemeinsam; er ist der halbe Winkel $(\sigma\,\sigma')$ und sei mit $\frac{\psi}{2}$ bezeichnet. Die beiden Ecken sind rechtwinklig, die erste bei f, die zweite bei m, und daraus erhalten wir mit Anwendung der für körperliche Ecken geltenden Formel

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\,(e, f)}{\operatorname{tg}\,(e, m)}$$

und

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\,(e, m)}{\operatorname{tg}\,(e, r)},$$

also

$$\cos^2\frac{\psi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\,(e, f)}{\operatorname{tg}\,(e, r)},$$

eine Formel analog der beim Kreis erhaltenen. Wir werden jedoch auch hier der geometrischen Konstruktion des § 8 den Vorzug geben.

---

2. Erzeugung durch 2 projektive Ebenenbüschel eines Bündels.

§ 10.

Seien s uud s' die Büschelachsen, S ihr Schnittpunkt, so wird S Kegelspitze, s und s' werden zwei Kanten, ihre Verbindungsebene $\varepsilon \equiv \varphi'$ wird die gemeinsame Ebene der beiden Büschel sein, und ihr müssen entsprechen die Berührungsebenen ε' bezw φ des Kegels in s' und s; die Schnittlinie $\varepsilon'\varphi$ heisse $\mathfrak{f}$. Ist der Kegel rotatorisch, so bildet $\mathfrak{f}$ mit s und s' gleiche Winkel, und es ist gleichzeitig $\sphericalangle(\varepsilon, \varphi) = (\varepsilon', \varphi')$. Alsdann erhalten wir ferner die Achse m durch Schnitt der in s und s' auf φ und ε' normalen Ebenen ν und ν'_1; diese mögen aus dem Kegel die Kanten n und n'_1 ausschneiden. Dann müssen die der ν bezw. ν'_1

entsprechenden Ebenen ν' bezw. ν_1 von s' bezw. s nach π bezw. π_1' hingehen. Die 4 Kanten s, s', π, π_1' bilden also ein dem Kegel eingeschriebenes einfaches Vierkant, dessen Diagonalebenen sich in m schneiden. Von einem solchen Vierkant gilt[1]), dass die beiden Paare Gegenebenen 2 zur Kegelachse und zu einander senkrechte Schnittlinien haben; deren Normalebenen in der Kegelspitze stehen daher je auf dem betreffenden Gegenebenenpaar senkrecht, schneiden sich in der Kegelachse und sind zu einander normal; die Kanten des Vierseits liegen paarweise symmetrisch in bezug auf sie. Ziehen wir nun die Ebene $(\mathfrak{f}\ \mathrm{m}) = \mu$, so trennt sie φ und ε' symmetrisch, und wegen der Winkelgleichheit $(\mathfrak{f}, \mathrm{s}) = (\mathfrak{f}, \mathrm{s}')$ sind auch s und s' bezüglich μ symmetrisch und μ steht auf $(\mathrm{s}\ \mathrm{s}') = \varepsilon$ senkrecht. Ganz ebenso sind π und π_1' bezüglich μ symmetrisch, denn zunächst sind es offenbar ν und ν_1' und dann bilden π und π'_1 mit $\mathrm{m} = \nu\,\nu_1'$ denselben Winkel wie s und s'. Folglich ist μ auf der Ebene $(\pi\,\pi_1')$ senkrecht und ist eine Symmetrieebene des Vierkants. Die auf μ in m normale Ebene μ_1 geht daher durch die Schnittlinie von ε und $(\pi\,\pi_1')$ und ist die zu μ senkrechte Ebene des Vierkants, senkrecht auf dem Gegenebenenpaar $\nu_1\ \nu'$, dessen Schnittlinie q wieder in μ liegt und, wie wir oben sahen, auf m senkrecht sein muss. Für ν' haben wir also das Senkrechtstehen auf μ_1 oder das Gehen durch q bei der Konstruktion zu berücksichtigen. Demnach erhalten

---

[1]) Eine zu m senkrechte Ebene π schneidet einen Kreis aus, die Spuren der Vierkantskanten bilden ein ihm eingeschriebenes Viereck, dessen Diagonalen sich im Kreismittelpunkt schneiden. Es muss daher ein Rechteck sein, je 2 Gegenebenen des Vierkants haben daher in π parallele Spuren, folglich eine zu diesen und damit zu π parallele, auf m senkrechte Schnittlinie, und zwar stehen beide Schnittlinien aufeinander senkrecht, als parallel zu anstossenden Rechteckseiten. Sie sind also auch parallel und folglich durch eine Ebene verbindbar, beziehentlich mit den zu den Rechteckseiten parallelen Durchmessern, und so entstehen 2 Achsenschnitte, die zu einander senkrecht sind und je auf einem Paar Gegenebenen des Vierkants senkrecht stehen, da sie zu 2 Gegenseiten des Schnittrechtecks senkrecht sind. Man sieht leicht ein, dass die Kanten des Vierkants in bezug auf sie symmetrisch liegen.

wir: Um die Ebenenbüschel um s und s' so projektiv zu machen, dass sie einen Rotationskegel erzeugen,

„ordnet man der gemeinschaftlichen Ebene $\varepsilon \equiv \varphi'$ 2 Ebenen ε' und φ zu, die mit ihr denselben Winkel bilden und sich in $\mathfrak{f}$ schneiden mögen. Die in s und s' auf φ und ε' normalen Ebenen ν und ν_1' mögen sich in m schneiden, die Ebene ($\mathfrak{f}$ m) heisse μ. Dann stellt man sich eine Ebene ν' durch s' her, indem man entweder in m auf μ die Normalebene μ_1 errichtet und von s' auf μ_1 die Normalebene fällt, oder indem man s' mit der in μ auf m in S errichteten Senkrechten q verbindet. Diese Ebene ν' ordnen wir der ν als entsprechende zu".

Die beiden Konstruktionen für ν' sind identisch, denn wenn μ und ν' auf μ_1 senkrecht stehen, dann tut es auch ihre Schnittlinie, und diese steht dann auch auf der in μ_1 gelegenen m senkrecht und ist, da in μ gelegen, die zur zweiten Konstruktion benutzte q. — Ferner ist durch die Zuordnung $\varepsilon, \varepsilon'$; φ, φ'; ν, ν' eindeutig eine Projektivität festgelegt. Dieselbe Projektivität aber hätten wir erhalten, wenn wir statt ν, ν' die Zuordnung ν_1', ν_1 genommen hätten, unter ν_1 die zu μ_1 normale Ebene durch s verstanden. Denn die Ebenen $\varepsilon, \varphi, \nu, \nu_1$ aus s schneiden sich mit den Ebenen $\varphi', \varepsilon', \nu_1', \nu'$ aus s' auf der Ebene μ[1]), daher ist

$$\varepsilon\ \varphi\ \nu\ \nu_1 \overline{\wedge} \varphi'\ \varepsilon'\ \nu_1'\ \nu' \overline{\wedge} \varepsilon'\ \varphi'\ \nu'\ \nu_1'.$$

In der von uns hergestellten Projektivität aber sind

$$\varepsilon', \varphi', \nu', \text{ und } \varepsilon, \varphi, \nu \text{ entsprechend,}$$

also gilt auch für sie die eben gefundene Beziehung

$$\varepsilon\ \varphi\ \nu\ \nu_1\ \pi\ \varepsilon'\ \varphi'\ \nu'\ \nu_1',$$

d. h. in der von uns hergestellten Projektivität sind auch ν_1 und ν_1' entsprechend. —

§ 11.

Den Nachweis, dass unsere Projektivität einen Rotationskegel liefert, führen wir so, dass wir uns einen, φ und ε'

[1]) ν_1 und ν' schneiden sich in q.

in s und s' berührenden Rotationskegel herstellen, was wegen der Winkelgleichheit (ſ, s) = (ſ, s') möglich ist, und die von ihm in den Büscheln um s und s' erzeugte projektive Zuordnung als identisch mit der vorgelegten Projektivität erweisen.

Zunächst entsprechen sich sicher in der durch unseren Hilfsrotationskegel erzeugten Projektivität die gemeinsame Ebene (s s') der beiden Büschel und bezw. die Tangentialebenen in s und s', d. h. aber unserer Hilfsprojektivität gehören die Paare ε, ε' und φ, φ' an. Achse des Hilfskegels ist offenbar m, daher sind auch ν und ν_1' die zu φ bezw. ε' normalen Achsenschnitte. Achsenschnitt ist auch die Ebene (ſ m) = μ, sie steht ausserdem auf (s s') = ε senkrecht. Die beiden Ebenen ν und ν_1' schneiden, da beide Achsenschnitte sind, aus dem Kegel ein Vierkant aus von der Art, wie es im vorigen Paragraphen vorkam. Für dieses Vierkant ist nun μ, weil ⊥ ε, die eine Symmetrieebene, folglich die Normalebene dazu in m die andere; das war aber die Ebene μ_1, und so sehen wir, wenn wir die nach der Schnittkante von ν mit dem Kegel gehende, der ν in der Hilfsprojektivität entsprechende Ebene aus s' ν'' nennen, ν'' muss auf μ_1 senkrecht stehen. Folglich ist sie identisch mit der ν' unserer vorliegenden Projektivität, und somit gehören der durch den Rotationskegel involvierten Projektivität die 3 Paare ε, ε'; φ φ'; ν, ν' an, beide Projektivitäten sind also identisch, und die im vorigen § hergestellte Projektivität liefert in der Tat einen Rotationskegel. —

Wir schliessen eine für die Umkehrung unseres Problems wichtige Bemerkung über die entsprechenden gleichen Winkel an, die im Vorangehenden auftraten, da ∢ (ε, φ) = (ε', φ') war. Bei projektiven Ebenenbüscheln gibt es, ganz wie bei projektiven Strahlenbüscheln, 2 Systeme entsprechender gleicher Winkel; die Paare des einen Systems haben hyperbolische, die des andern elliptische Lage zu dem Paar entsprechender rechter Winkel. Aber auch hier können wir die Systeme noch anders unterscheiden, wenn wir den Begriff „entsprechend im engeren Sinne" einführen und 2 Winkel nur dann entsprechend nennen, wenn sie weitere

entsprechende Ebenen enthalten. Dann haben wir auch hier ein System gleicher und ein System supplementärer entsprechender Winkel im engeren Sinne, wobei die Paare des ersten die hyperbolische, die des zweiten die elliptische Lage zu dem Paar entsprechender rechter Winkel haben. — Nach den Kanten, die den kleineren der von s und s' begrenzten Abschnitte der Kegelfläche erfüllen, gehen nun in unserem Falle lauter entsprechende Ebenen, die in den gleichen Winkeln (ε, φ) und (ε', φ') selbst liegen, also gehören diese Winkel zu dem System im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel.

§ 12.

Nunmehr können wir ohne Weiteres die Frage, wie gegebene projektive Ebenenbüschel zu legen sind, damit sie einen Rotationskegel erzeugen, folgendermassen beantworten:

„Aus dem System im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel nimmt man ein Paar heraus, (ε, φ) und (ε', φ'), legt 2 nicht entsprechende Ebenen, ε und φ' etwa, in einander und dreht nun die 2. Büschelachse s' in der Ebene φ' um den Schnittpunkt $S = ss'$ so lange, bis die Ebene μ_1, die auf der den Schnittstrahl m der in s und s' auf φ und ε' normalen Ebenen ν und ν_1' mit $\varphi\ \varepsilon' = \mathfrak{f}$ verbindenden Ebene $(\mathfrak{f}\ \mathrm{m}) = \mu$ in m senkrecht steht, auch auf der der ν_1' entsprechenden Ebene ν_1 normal ist."

Das müssen wir noch modifizieren. μ und μ_1 stehen auf einander senkrecht, μ ist normal zu ε, μ_1 zu ν' und, wie wir weiter oben sahen, dann von selbst zu der der ν_1' entsprechenden ν_1. Folglich erhalten wir folgende Konstruktion:

„Sind (ε, φ) und (ε', φ') ein Paar im engeren Sinne entsprechender gleicher Winkel, ist ν_1' die Normalebene zu ε' in s', ν_1 die ihr entsprechende Ebene des Büschels (s) und ν die Normalebene in s auf φ, so stellen wir einen rechten Flächenwinkel $\mu\,\mu_1$ her, so dass seine Scheitellinie m in ν liegt, μ auf ε und μ_1 auf ν_1 senkrecht steht. Der Schnittpunkt von m mit $\varepsilon'\ \varphi = \mathfrak{f}$ wird Kegelspitze S.

Nun wird der zweite Büschel so gelegt, dass s' durch S geht und ε' zu φ bezüglich μ symmetrisch liegt, und endlich wird s' in ε' um S so gedreht, bis s' zu s bezüglich μ symmetrisch wird, und zwar so, dass die gleichen Flächenwinkel (ε, φ) und (ε', φ') in denselben Winkel (φ, ε') hineinfallen."

Damit wird Koinzidenz von ε und φ' erzielt.

Ohne die letzte Bedingung sind für s' noch 2 Lagen möglich. Denken wir uns s' aus der richtigen Lage heraus um 180° gedreht, so fällt es zwar wieder in sich zurück, bleibt also zu s symmetrisch, dagegen ist die neue Lage von φ' zur alten symmetrisch geworden bezüglich der Normalebene in s' auf ε', fällt also nicht in sie hinein, und vereinigt sich somit nicht mit ε, wie notwendig. Bei Überschreitung von ∫ tritt der Winkel (ε', φ') dabei in den Nebenwinkel des Winkels (φ, ε') ein, in dem (ε, φ) liegt und bleibt darin, da derselbe Halbstrahl von ∫ bei der Drehung desselben Halbstrahls von s' um 180° nur einmal überschritten wird. Also ist diese Lage der beiden Winkel (ε, φ) und (ε', φ') nicht die richtige, sie müssen vielmehr in demselben Winkel (φ, ε') liegen. —

Die Aufgabe der Herstellung des rechten Flächenwinkels (μ, μ_1) ist folgendermassen lösbar: Alle auf ε bezw. ν_1 in S normalen Ebenen bilden einen Büschel um die Normale e auf ε bezw. n_1 auf ν_1 in S. Diese beiden Büschel machen wir so projektiv, dass wir jeder Ebene des ersten die dazu senkrechte Ebene des zweiten zuordnen. Das Erzeugnis ist dann ein orthogonaler Kegel; seine beiden Schnittlinien mit ν sind zwei Strahlen m, ihre Verbindungsebene mit e und n_1 bilden zwei Flächenwinkel (μ, μ_1), die beide brauchbar sind, wofern sie reell sind. Die Ebene (e n_1) = π werde von ν in x geschnitten; π steht auf ε ν_1 = s senkrecht, mithin auch auf der durch s gehenden ν, und dann folgt aus der auf S. 20 erwähnten Eigentümlichkeit des orthogonalen Kegels bezüglich seiner Kanten, dass x und damit ν in den spitzen Winkel (e, n_1) fallen muss, falls ν reell

schneiden soll. Dann fällt aber die zu ν senkrechte φ in den spitzen Winkel (ε, ν_1), und wir erhalten:

„Falls unsere Konstruktion reell sein soll, müssen die Winkel (ε, φ) und (ε', φ') so beschaffen sein, dass φ in den spitzen Winkel (ε, ν_1) fällt, wenn ν_1 die der Normalebene ν'_1 in s' auf ε' entsprechende Ebene ist."

Zur Herstellung der richtigen Winkel (ε, φ) und (ε', φ') legen wir s und s' parallel und machen die Büschel perspektiv. Schneiden wir dann mit einer zu s (und s') senkrechten Ebene, so erhalten wir perspektive Strahlenbüschel und können die in § 9 vorgenommene Konstruktion anwenden. Die Strahlen e, f, e', f', r, r' haben wir uns zu denken als Spuren von ε, φ, ε', φ', ν_1, ν_1', und da φ in dem spitzen Winkel (ε, ν_1) liegen muss, so liegt genau der dort besprochene Fall vor, führt uns also auch hier zum Ziel.

C. Das einschalige Rotationshyperboloid.

1. Erzeugung durch projektive Ebenenbüschel.

§ 13.

Eine allgemeine hyperbolische Rotationsfläche 2. Grades kann auf zwei Weisen durch projektive Gebilde 1. Stufe erzeugt werden, durch projektive Ebenenbüschel um windschiefe Achsen und durch projektive Punktreihen auf windschiefen Trägern. Soll das Erzeugnis Rotationsfläche sein, so kann es nur ein einmanteliges Rotationshyperboloid sein, denn dies ist die einzige hyperbolische Rotationsfläche 2. Grades, entstanden durch Rotation einer Hyperbel um ihre Nebenachse. Zieht man zu den einen oder anderen Geraden dieses Rotationshyperboloids durch einen beliebigen Punkt P des Raumes die Parallelen, so bilden diese einen Rotationskegel, denn sie gehen nach den unendlich fernen Punkten der einen Schar von Geraden unserer R^2, d. h. unser Kegel aus P projiziert den unendlich fernen Kegelschnitt der R^2 und ist, da dieser die absolute Kurve doppelt berührt, selbst rotatorisch. Denken wir uns P in den

Mittelpunkt der R^2 gelegt, so erhalten wir den Asymptotenkegel, und wir sehen, unser Kegel aus einem beliebigen P ist zu diesem parallel. — Das Rotations-Hyperboloid sei nun durch projektive Ebenenbüschel um 2 Erzeugende s und s' derselben Geradenschar erzeugt. Wir legen P beliebig auf s und ziehen durch P zu den Schnittlinien entsprechender Ebenen die Parallelen; diese bilden dann einen Rotationskegel. Dessen Kanten werden nun aber offenbar auch dadurch erhalten, dass man den Büschel (s') parallel mit sich so verschiebt, dass s' durch P läuft, und dass man nun zugeordnete Ebenen der beiden Büschel schneidet. Sollen also die projektiven Ebenenbüschel (s) und (s') ein Rotationshyperboloid erzeugen, dann müssen sie so beschaffen sein, dass sie, parallel mit sich selbst bis zum Schnitt ihrer Träger verschoben, einen Rotationskegel erzeugen, ein Gedanke, den Steiner in Aufgabe 12[1]) seines „Anhangs“ andeutet.

§ 14.

Wir gehen zur Herstellung unserer Projektivität aus von der in § 10 besprochenen Erzeugung des Rotationskegels durch projektive Ebenenbüschel $(\bar{s})$ und $(\bar{s}')$ und denken uns $(\bar{s}')$ beliebig parallel mit sich selbst so verschoben, dass $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ windschief werden[2]). Dabei wird die gemeinsame Ebene $\bar{\varepsilon} = \bar{\varphi}'$ gleichsam geteilt in die beiden einzig möglichen Parallelebenen durch s und s', ε und φ'. Die diesen entsprechenden Ebenen ε' und φ müssen dann ersichtlich mit ε bezw. φ' denselben Winkel bilden. Die Normalebenen ν und ν_1' in s und s' auf φ und ε' liefern nach der Parallelverschiebung eine Schnittgerade m, die zu der Kegelachse $\bar{m}$ parallel ist und s sowie s' schneidet; sie kann aus letzterem Grunde nicht Achse des Hyperboloids sein, wohl aber ist diese zu m parallel, da $m \parallel \bar{m}$ und $\bar{m}$ Rotationsachse unseres, zum Asymptotenkegel parallelen, Kegels ist. Die Ebene $\bar{\mu}$ halbiert beim Kegel den Flächenwinkel $(\bar{\varphi}, \bar{\varepsilon}')$ und ist infolge-

[1]) S. Anm. 2, S. 7.

[2]) Die auf den Kegel bezüglichen Buchstaben seien überstrichen.

dessen zu $\bar{\varepsilon}$ (und $\bar{\varphi}'$) normal aus $\bar{\varphi}$ $\bar{\varepsilon}'$. Nennen wir diejenige Ebene, die bei unserem Hyperboloid aus φ ε' kommt und zu ε normal ist, μ, so erfüllt sie auch die erste und ist der $\bar{\mu}$ parallel. Während aber dort $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ symmetrisch in Bezug auf $\bar{\mu}$ waren, da beide in der zu $\bar{\mu}$ normalen $\bar{\varepsilon}$ gelegen, gilt dies für s und s' beim Hyperboloid für die μ nicht, und diese geht daher nicht durch m, ist aber zu ihr parallel. Die auf $\bar{\mu}$ in $\bar{m}$ senkrechte Ebene $\bar{\mu}_1$ beim Kegel endlich geht über in die Normalebene auf μ aus m; sie heisse μ_1. Demnach erhalten wir folgende Konstruktion einer ein Rotationshyperboloid erzeugenden Projektivität in den Büscheln (s) und (s'):

„Den beiden Parallelebenen ε und φ' durch s und s' ordnen wir 2 Ebenen ε' bezw. φ zu, die unter gleichen Winkeln dagegen geneigt sind. Sei μ die zu ε normale Ebene aus dem Schnittstrahl $\mathfrak{f} = \varphi\ \varepsilon'$, seien ferner ν und ν_1' die in s und s' auf φ und ε' normalen Ebenen, m ihre Schnittlinie und μ_1 die Normalebene aus m auf μ, so ordnet man noch der ν die Normalebene aus s' auf μ_1 als ν' zu."

Wir erkennen aus unserer Konstruktion, dass μ zu m parallel ist, wie oben als notwendig gefunden, ferner könnten wir, in Anlehnung an den Fall beim Rotationskegel, auch hier der ν_1' die zu μ_1 normale Ebene ν_1 aus s zuordnen, ohne eine andere Projektivität zu erhalten.

Die Umkehrung gestaltet sich wie beim Kegel; wir gehen von der zweiten dort gegebenen Konstruktion (§ 12) als der geeigneteren aus und können nun einfach sagen:

„Wir nehmen dieselbe Konstruktion vor wie beim Kegel (§ 12) und verschieben den Büschel (s') beliebig im Raume parallel mit sich selbst."

---

2. Erzeugung durch projektive Punktreihen.

§ 15.

Hier können wir nicht das Mittel der Parallelverschiebung der Träger s und s' bis zum Schneiden benutzen, da die beiden Geradenscharen alsdann in eine Ebene zusammen-

klappen und einen Kegelschnitt umhüllen der nicht mit der Fläche in ähnlichem Zusammenhang steht, wie der Kegel P bei der Erzeugung durch projektive Ebenenbüschel. Wir können aber diese benutzen, um projektive Punktreihen auf s und s' herzustellen, die ein einschaliges Rotationshyperboloid erzeugen. Denken wir uns ein Hyperboloid durch projektive Punktreihen (s) und (s') erzeugt, so erhalten wir projektive Ebenenbüschel um s und s', indem wir je zwei Ebenen aus s und s' einander zuordnen, die nach entsprechenden Punkten auf dem anderen Träger s' bezw. s gehen. Zwei so zugeordnete Ebenen schneiden sich dann offenbar in der Verbindungslinie jener beiden entsprechenden Punkte auf s' und s, d. h. in einer Erzeugenden des Hyperboloids, und so wird dieses auch durch die beiden projektiven Ebenenbüschel um s und s' erzeugt, und wir können umgekehrt, von diesen ausgehend, das Hyperboloid erzeugende Punktreihen herstellen, indem wir entsprechende Ebenen aus s bezw. s' entsprechende Punkte auf s' bezw. s einschneiden lassen. Daraus sieht man sofort, dass die den beiden Parallelebenen zu s und s' entsprechenden Ebenen die Fluchtpunkte einschneiden müssen, da jene Parallelebenen nach den unendlich fernen Punkten gehen.

§ 16.

Gegeben seien die Windschiefen s und s'. Wir denken uns die Ebenenbüschel um s und s' so projektiv gemacht, dass sie ein Rotationshyperboloid erzeugen (§ 14). Dann sind in der Bezeichnungsweise von § 14, ε und φ' die zu s' und s und unter einander parallelen Ebenen durch s und s'. Die ihnen entsprechenden Ebenen ε' und φ bilden mit ihnen gleiche Winkel und schneiden in s und s' zwei Punkte R und Q' ein, die, nach dem am Ende von § 15 Gesagten, zu Fluchtpunkten von s und s' zu nehmen sind. Wir können noch eine einfachere Herstellung für sie angeben. Sind Z und Z_1' die Schnittpunkte der Normalebenen in s' auf φ' und in s auf ε mit s bezw. s', so ist ZZ_1' die kürzeste Strecke zwischen den Punkten von s und s'. Die Ebenen φ

und ε' durch s und s' schneiden in φ' bezw. ε Strahlen ein, die zu s bezw. s' parallel sind, durch Q', bezw. R gehen und von Z_1' bezw. Z denselben Abstand haben, da ZZ_1' auf ε und φ' senkrecht steht und φ und ε' gleich gegen ε und φ' geneigt sind; ist γ_1 diese Neigung, so ist jener Abstand gleich $\overline{ZZ_1'} \cdot \operatorname{tg} \gamma_1$. Fällen wir auf jene Schnittstrahlen von Z_1' bezw. Z die Lote, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenusen $Q'Z_1'$ bezw. RZ sind und auf s' bezw. s liegen, und in denen jene Lote Katheten sind; sie sind gleich lang. Ferner aber bilden unsere Schnittstrahlen $\varphi\,\varphi'$ und $\varepsilon\,\varepsilon'$ mit s' bezw. s denselben Winkel, nämlich (s, s'), folglich sind unsere rechtwinkligen Dreiecke kongruent, und wir schliessen, $R\,Z = Q'\,Z_1'$. Umgekehrt können wir aus dieser Gleichheit auf die der Winkel (ε', φ') und (ε, φ) schliessen, und so sehen wir: Als Fluchtpunkte R und Q' auf s und s' sind 2 von Z bezw. Z_1' gleichweit entfernte Punkte zu nehmen.

Um die Richtung der Achse zu erhalten, hatten wir die Normalebenen ν und ν_1' in s und s' auf φ und ε' zu schneiden, in m. Sie mögen in s' und s die Punkte N' und N_1 einschneiden; deren Verbindungslinie ist dann m. Da φ und ε' gegen ε bezw. φ' gleich geneigt sind, so sind es auch ν und ν_1', sie schneiden daher auch in s' und s zwei Punkte N' und N_1 ein, die von Z_1' und Z gleichweit entfernt sind, aus ganz ähnlichen Gründen wie bei den Ebenen φ und ε'; es ist also $Z\,N_1 = Z_1'\,N'$, und so sehen wir, wenn wir N_1 hergestellt haben, können wir N' durch Abtragung finden. Man sieht leicht, dass Z in jedem Falle zwischen R und N_1 gelegen ist, und man wird nun, um N' zu finden, $Z\,N_1$ von Z_1' ab auf s' so aufzutragen haben, dass Z_1' zwischen N' und Q' liegt.

Die Ebene μ_1 endlich stand senkrecht auf μ und kam aus m, das zu μ parallel war; also steht μ_1 auch senkrecht auf der Parallelebene durch m zu μ. Andererseits war μ senkrecht auf ε aus $\varphi\,\varepsilon'$, also projiziert jene Parallelebene die m auf ε, und da μ_1 auf ihr senkrecht steht, so folgt, dass μ_1 die Ebene kleinster Neigung gegen ε durch m ist.

Die Normalebene ν' aus s' auf μ_1 entspricht der ν und muss daher den dem N' entsprechenden Punkt N in s einschneiden. Mithin haben wir folgende Konstruktion einer ein Rotationshyperboloid erzeugenden Projektivität zwischen den Punktreihen auf s und s':

„Seien Z und Z_1' die Punkte kürzesten Abstands zwischen s und s', so nehmen wir zwei von ihnen gleichweit entfernte Punkte R und Q' zu Fluchtpunkten auf s und s'. Hierauf legen wir die Ebenen $\varepsilon' = R\,s'$ und $\varphi = Q'\,s$, errichten auf ihnen in s' und s die Normalebenen ν_1' und ν und schneiden sie in m — oder wir legen nur die Ebenen ε' und ν_1', schneiden ν_1' mit s in N_1 und tragen $Z\,N_1$ auf s' von Z_1' aus ab bis N', und zwar so, dass der Folge $R\,Z\,N_1$ die Folge $Q'\,Z_1'\,N'$ entspricht, und bezeichnen $N'\,N_1$ mit m. Sei dann μ_1 diejenige Ebene durch m, die gegen das Paar der Parallelebenen durch s und s' die kleinste Neigung hat, so legen wir durch s' zu μ_1 die Normalebene ν' und ordnen ihren Schnittpunkt N mit s dem Schnittpunkt N' von ν mit s' zu."

Für den Punkt N lässt sich eine einfache Konstruktion angeben. Die Ebene μ_1 durch m ist, wie wir schon fanden, senkrecht auf derjenigen Ebene, welche m auf φ' projiziert. Fällen wir daher das Lot $N_1\,\mathfrak{N}$ von N_1 auf φ' und von $\mathfrak{N}$ das Lot q auf m, so steht dieses auf μ_1 senkrecht. Die Ebene ν' war $\perp \mu_1$ aus s'; wir können daher ν' einfach dadurch herstellen, dass wir durch Z_1' zu q die Parallele r' ziehen und sie mit s' durch eine Ebene verbinden. Um nun den Schnitt N dieser Ebene mit s zu erhalten, schneiden wir r' in T mit ε; dazu genügt, dass wir r' mit der Parallelen durch Z zu $\mathfrak{N}\,N'$ schneiden, was möglich ist. Denn die Ebene $(r', Z\,Z_1')$ ist parallel zu $N_1\,\mathfrak{N}\,N'$, da $r' \parallel q$ und $N_1\,\mathfrak{N} \parallel Z\,Z_1'$ ist; ihre Schnittlinie mit φ', also auch die mit ε ist zu $\mathfrak{N}\,N'$ parallel, ist also die Parallele durch Z zu $\mathfrak{N}\,N'$, und ihr Schnitt T mit r' ist der Schnitt von r' mit ε. T liegt nun in der Schnittlinie von ν' mit ε, da ν' durch r' geht; diese Schnittlinie ist zu s' parallel, weil ν' auch durch s' geht und ε zu s' parallel ist. Also erhalten wir N,

indem wir die Parallele durch T zu s' ziehen und mit s schneiden.

Wir können auch ausgehen von der Normalebene aus s auf μ_1, ν_1, und ihrem Schnittpunkt N_1' mit s' zuordnen den Schnittpunkt N_1 von ν_1' mit s. Es ergibt sich dieselbe Projektivität, wie wir aus den Verhältnissen bei der Erzeugung durch projektive Ebenenbüschel wissen.

§ 17.

Wir kommen nun wieder zu der umgekehrten Frage, wie gegebene projektive Punktreihen im Raume gelegt werden müssen, um ein Rotationshyperboloid zu erzeugen. Wir werden versuchen, sie so zu legen, dass die Ebenenbüschel um ihre Träger, die dann zugleich die Fläche erzeugen, so projektiv werden, dass sie eine Rotationsfläche liefern.

Wir legen s fest hin, und geben uns durch s eine beliebige Ebene ε. Dann stellen wir einen rechten Flächenwinkel her, mit s als Scheitelkante und mit den Ebenen φ und ν. Ist R der Fluchtpunkt auf s, so muss s' zunächst so gelegt werden, dass durch s' zwei Ebenen ε' und φ' möglich sind, von denen φ' zu ε parallel ist, die untereinander denselben Winkel bilden, wie ε und φ, und von denen ε' durch R läuft. Diese Lage von s' erzielen wir folgendermassen: Wir stellen uns den Rotationskegel her, der eingehüllt wird von allen Ebenen durch R, die mit ε denselben Winkel bilden wie φ; φ gehört also auch zu seinen Tangentialebenen. Eine von diesen Tangentialebenen nehmen wir als ε' und legen s' so in sie, dass sie parallel zu ε wird. Dann ist φ' die Parallelebene durch s' zu ε. Da wir wissen, φ muss durch den Fluchtpunkt Q' von s' gehen, so verschieben wir noch s' so in sich selbst, dass Q' in φ fällt, d. h. auf die Schnittline $\varphi\,\varepsilon' = \mathfrak{f}$.

Damit ist aber s' noch nicht in der richtigen Lage. Wenn wir nämlich auf ε' in s' die Normalebene ν_1' errichten, mit ν in m schneiden, durch m die Ebene μ_1 geringster Neigung gegen ε herstellen und durch s' die zu μ_1 normale Ebene ν' legen, so müssen ν' und ν in s und s' zwei Punkte N und N' einschneiden, die sich in der gegebenen Projek-

tivität auf s und s' entsprechen. Um dies zu erreichen, verschieben wir s' in ε' parallel mit sich so, dass Q' auf dem Strahl $\varphi\ \varepsilon' = \mathfrak{f}$ bleibt. Dann verschiebt sich ν_1' parallel mit sich, also auch $\nu\ \nu_1' = m$, und damit auch μ_1 und ν'. Der Schnittpunkt N von ν' mit s läuft dabei über s, der Schnittpunkt N' von ν mit s' läuft über s', und zwar bewegen sich N auf s und N' auf s' projektiv. Wir haben somit auf s und s' 2 projektive Zuordnungen, die alte, gegebene und diese neue. Sie haben 2 reelle oder 2 imaginäre Paare gemein, und jedes solche gemeinsame Paar liefert eine Lage von s', wo ν und ν' in s' und s zwei Punkte N' und N einschneiden, die sich in der gegebenen Projektivität entsprechen. Dann ist aber s' in der richtigen Lage, und wir können folgende Konstruktion aussprechen:

„Wir legen s in eine feste Ebene ε und durch s zwei zu einander normale Ebenen φ und ν und durch den Fluchtpunkt R von s eine Ebene ε', die mit ε denselben Winkel bildet wie φ. Nun legen wir s' so in ε', dass es parallel zu ε ist und sein Fluchtpunkt Q' in φ, d. h. auf die Schnittlinie $\varphi\ \varepsilon' = \mathfrak{f}$ fällt. Hierauf errichten wir in s' auf ε' die Normalebene ν_1', schneiden sie mit ν in m, legen durch m die Ebene μ_1 geringster Neigung gegen ε und stellen die Normalebene durch s' auf μ_1 her, ν'. Nun verschieben wir s' in ε' parallel mit sich selbst, so dass Q' in $\mathfrak{f}$ bleibt, bis ν und ν' in s' und s zwei Punkte N' und N einschneiden, die sich in der gegebenen Projektivität auf s' und s entsprechen. Diese Lage von s' ist die gesuchte, das Erzeugnis der gegebenen projektiven Punktreihen ist nun ein Rotationshyperboloid."

Wir verlassen damit die projektiven Gebilde 1. Stufe und gehen über zu der Erzeugung der Rotationsflächen 2. Grades durch projektive Gebilde 2. und 3. Stufe.

II. Die Erzeugung von Rotationsflächen 2. Grades durch projektive Gebilde 2. und 3. Stufe.

1. a. Kreis und b. Rotationskegel.

§ 18.

a. Wir beschäftigen uns zunächst mit den beiden singulären Rotationsflächen 2. Grades, dem Kreis und dem Rotationskegel, insofern sie Kernkurve, bezw. Kernkegel einer Polarcorrelation in der Ebene, bezw. im Bündel sind.

Der Kernkegelschnitt K eines Polarfeldes hat zu Symmetrieachsen und Centrum die Achsen a, b und den Mittelpunkt R der Polarcorrelation. Sind die Achsen gegeben, so reicht zur Bestimmung des Polarsystems ein beliebiges Paar Pol und Polare C, c' hin[1]). Soll nun K ein Kreis sein, so muss, wie auch C liegt, c' auf RC senkrecht stehen.

Ist der Kreis reell, so liegen auf RC C und der Schnittpunkt C_1 von c' mit RC auf derselben Seite von R; schneidet c' auf der anderen Seite, so wird K imaginär, und die Polarcorrelation ist alsdann der reelle Repräsentant für K.

Mithin können wir folgendes Ergebnis aussprechen:

„Um eine ebene Polarcorrelation herzustellen, die einen Kreis zur Basis hat, wählt man zwei zu einander senkrechte Geraden a und b der Ebene zu Achsen und ordnet einem beliebigen Punkte C eine Gerade c' zu, die auf der Verbindungslinie von C mit dem Schnittpunkte R der Achsen senkrecht steht, etwa in C_1. Der Basiskreis ist reell oder imaginär, je nachdem C und C_1 auf derselben Seite von R liegen oder nicht."

Ist der Kreis K reell, so kann zur Bestimmung der Polarcorrelation auch ein Paar inzidenter Elemente C, c' dienen, sofern nur c' auf RC senkrecht steht. C und c' werden alsdann für K ein Punkt nebst zugehöriger Tangente mithin wird $\overline{CR}$ Radius von K.

Zusatz: „Legt man $c' \perp RC$ durch C, so wird der Basiskreis reell und hat $\overline{RC}$ zum Halbmesser."

---

[1]) Denn a, b und die unendlich ferne Gerade bilden ein Polardreieck. S. Steiner-Schroeter Kegelschnitte. 3 Aufl. S. 407. Nr. 3.

§ 19.

b. Die Herstellung eines Polarbündels, dessen Basis ein Rotationskegel ist, gestaltet sich ähnlich. Die Ebenen ρ', σ', τ' des Hauptdreikants, d. h. des reellen dreirechtwinkligen Polardreikants, sind die Symmetrieebenen, seine Kanten $r = (\sigma' \tau')$, $s = (\tau' \rho')$, $t = (\rho' \sigma')$ die Achsen des Basiskegels. Durch das Hauptdreikant und ein beliebiges 4. Paar polarer Elemente c, γ' ist der Polarbündel bestimmt. Ist die Basis ein Rotationskegel, so muss, falls r Rotationsachse ist, γ' auf der Ebene rc normal sein. Aehnlich wie beim Kreis gilt auch hier: Ist der Rotationskegel reell, so liegen in cr c und der Schnitt c_1 von γ' auf derselben Seite von r; liegen sie auf verschiedenen Seiten, so muss die Basis imaginär sein, und die reelle Polarcorrelation ist ihr reeller Repräsentant.

„Man erhält also eine Polarcorrelation im Bündel S, deren Basis ein Rotationskegel $\mathfrak{K}$ mit der Achse r ist, wenn man r und zwei zu ihr und zueinander rechtwinklige Strahlen durch S zu Hauptachsen macht und einem beliebigen 4. Strahl c eine zu cr normale Ebene γ' zuordnet. Der Basiskegel ist reell oder imaginär, je nachdem der Schnitt c_1 von γ' mit cr auf derselben Seite von r liegt wie c oder nicht.“

Endlich können wir auch hier in dem Falle, dass wir einen reellen Basiskegel wollen, die Ebene γ' durch c hindurchgehen lassen, normal zu cr; c und γ' werden dann für den Basiskegel eine Kante und ihre zugehörige Tangentialebene, und der Winkel (c, r) gibt die halbe Oeffnung des Kegels an.

Zusatz: „Geht γ' ($\perp$ cr) durch c, so ist der Basiskegel reell und (c, r) seine halbe Oeffnung.“

Zum Schluss sei hingewiesen auf den Fall, dass $\gamma' \perp$ c steht. Dann haben wir 4 Paar normaler entsprechender Elemente, und unser Polarbündel wird identisch mit dem Orthogonalbündel, bei dem jedem Strahl seine Normalebene entspricht. Der Basiskegel ist dann natürlich imaginär, seine Kanten sind die zu sich selbst normalen, isotropen Strahlen durch S.

§ 20

Im Anschluss hieran sei eine andere, mir von Herrn Prof. Sturm mitgeteilte Erzeugung eines rotatorischen Polarbündels behandelt. In den Bündel S legen wir eine orthogonale Polarcorrelation, indem wir jedem Strahl x seine Normalebene ξ zuordnen. Ausserdem legen wir in den Bündel S eine Homologie, deren Achse s und Ebene σ wir als normal vorausetzen. Die Strahleninvariante der Homologie sei λ, die Ebeneninvariante ist dann $\frac{1}{\lambda}$. Das heisst, zu einer Ebene ξ erhalten wir die in der Homologie entsprechende ξ', indem wir ξ mit σ, in $\int$ etwa, schneiden, die Ebene $(\int s) = \Xi$ legen und ξ' nach der Gleichung herstellen:

$$(\xi\ \xi'\ \sigma\ \Xi) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{oder}$$

(1.) $(\xi\ \xi'\ \Xi\ \sigma) = \lambda$; zu einem Strahl x erhalten wir in der Homologie den entsprechenden Strahl x', wenn wir x mit s durch eine Ebene verbinden, diese mit σ schneiden, etwa in $\mathfrak{x}$, und x' herstellen nach der Gleichung

$$(2)\quad (x\ x'\ s\ \mathfrak{x}) = \lambda.$$

Aus dem Orthogonalbündel und der konzentrischen Homologie stellen wir nun eine Correlation her, indem wir einem Strahl x die seiner Normalebene ξ gemäss der Gleichung (1) in der Homologie entsprechende Ebene ξ' zuordnen. Wir wollen zeigen, dass unsere Correlation involutorisch ist. Wir fassen zu dem Zweck x als x_1', als Schnitt zweier Ebenen ξ_2' und ξ_3' des zweiten Bündels auf. Suchen wir die zu ξ_2' und ξ_3' in der Homologie entsprechenden Ebenen ξ_2 und ξ_3 gemäss den Gleichungen

$$(\xi_2\ \xi_2'\ \Xi_2\ \sigma) = \lambda \text{ und } (\xi_3\ \xi_3'\ \Xi_3\ \sigma) = \lambda$$

auf, unter Ξ_2 und Ξ_3 die Verbindungsebenen der Schnittstrahlen $\xi_2\ \sigma$ und $\xi_3\ \sigma$ mit s verstehend, nennen ihre Normalstrahlen x_2 und x_3, so steht deren Verbindungsebene $(x_2\ x_3) = \xi_1$ auf der Schnittlinie $\xi_2\ \xi_3 = x_{23}$ senkrecht und ist die dem x_1' entsprechende Ebene im ersten Bündel. Sie muss, falls unsere Verwandtschaft involutorisch sein soll, mit ξ' identisch sein.

In der Homologie entspricht dem Strahl x_1' offenbar der x_{23}, und da $x_1' \equiv x$, die Ebenen $(x_1' s)$ also identisch mit $(x s)$ ist, so gilt

$$(x_{23}\ x_1'\ s\ \mathfrak{x}) = (x_1'\ x_{23}\ \mathfrak{x}\ s)$$
$$= (x\ x_{23}\ \mathfrak{x}\ s) = \lambda.$$

Diese 4 Strahlen liegen in der Ebene (sx), ihre Normalebenen schneiden sich daher in einem Strahl $\mathfrak{f}$, der $\perp (sx)$ ist, daher, weil $s \perp \sigma$ und demnach $(sx) \perp \sigma$ ist, in σ liegt, und zwar $\perp \mathfrak{x}$. Die Normalebene ξ von x muss, da $\mathfrak{x}$ die Projektion von x auf σ ist, durch $\mathfrak{f}$ gehen, $\mathfrak{f}$ ist also, mit unserer früheren Bezeichnung in Einklang, der Schnittstrahl $\xi\sigma$, und die Ebene $(\mathfrak{f}s) = \Xi$ ist die Normalebene auf $\mathfrak{x}$. Wir fanden schon, auf x_{23} ist ξ_1 normal, und wissen, zu s ist σ senkrecht. Ersetzen wir unsere 4 Strahlen x, x_{23}, $\mathfrak{x}$, s durch ihre Normalebenen ξ, ξ_1, Ξ. σ, so bleibt das Doppelverhältnis ungeändert, es ist daher

$$(\xi\ \xi_1\ \Xi\ \sigma) = \lambda;$$

nach (1) ist $(\xi\ \xi'\ \Xi\ \sigma) = \lambda,$

also muss ξ_1 mit ξ' identisch sei, d. h. die Verwandtschaft ist involutorisch und daher Polarcorrelation. Ihr Kernkegel wird gebildet von allen Strahlen x, die in ihre entsprechenden Ebenen ξ' fallen. Soll dies geschehen, dann muss offenbar ξ' auf ξ senkrecht stehen, unserer Gleichung (1) muss ein orthogonales Paar ξ, ξ' genügen, Dieses wollen wir aufsuchen. Es ist

$$(0)\ \lambda = (\xi\ \xi'\ \Xi\ \sigma) = \frac{\sin\ (\xi,\ \Xi).\ \sin\ (\xi',\ \sigma)}{\sin\ (\xi',\ \Xi).\ \sin\ (\xi,\ \sigma)}$$

Nun soll ξ' senkrecht zu ξ sein, also ist

$$\sphericalangle\ (\xi,\ \sigma) = 90^0 + (\xi'\ \sigma) \text{ und}$$

$$(1.)\ \sin\ (\xi,\ \sigma) = \cos\ (\xi',\ \sigma).$$

Ferner ist Ξ senkrecht zu σ, da sie durch s geht, also

$$\sphericalangle\ (\xi,\ \Xi) = (\xi',\ \sigma) \text{ und}$$

$$(\Xi,\ \xi') + (\xi',\ \sigma) = 90^0,$$

mithin $(2.)\ \sin\ (\xi,\ \Xi) = \sin\ (\xi',\ \sigma)$ und

$$(3.)\ \sin\ (\xi',\ \Xi) = -\ \cos\ (\xi',\ \sigma).$$

Setzt man diese Werte in (0) ein, so erhält man $\lambda = -\ \mathrm{tg}^2\ (\xi',\ \sigma)$. Weil aber ξ' durch x gehen soll und x auf der Schnittlinie $\xi'\ \sigma$ senkrecht steht, so ist

$$\sphericalangle (x, \sigma) = (\xi', \sigma), \text{ folglich}$$
$$\lambda = -\operatorname{tg}^2 (x, \sigma)$$

und man sieht:

Die Gleichung ist reell lösbar nur für negatives λ und liefert für tg (x, σ) zwei entgegengesetzt gleiche Werte, deren zugehörige x symmetrisch liegen bezüglich s. Stellt man nun in jeder Ebene durch s die beiden Strahlen x nach dieser Gleichung her, so bilden alle diese Strahlen einen Rotationskegel um s, den gesuchten Kernkegel. Für den Fall $\lambda = -1$ ist die Homologie involutorisch, entsprechende Ebenen ξ und ξ' liegen symmetrisch zu s, die den Kernkegel umhüllenden Ebenen bilden mit s einen Winkel von 45°, die Oeffnung des Kernkegels wird 90°, der Kegel selbst reell.

2. Rotationsflächen 2. Grades, erzeugt aus speziellen Punkten und Ebenen.

§ 21.

a. Unsere im Vorangehenden besprochene Erzeugung von Kreis und Rotationskegel führt zu einer solchen von allgemeinen R^2 durch correlative Bündel und Felder. Beginnen wir mit dem in § 19 und 20 behandelten Polarbündel. Wir denken uns denselben in 2 involutorisch correlative Bündel aufgelöst und den zweiten Bündel beliebig parallel mit sich verschoben; sein Scheitel falle nach S'. Dann sind die Bündel in Correlation (C) und erzeugen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Ebenen eine Fläche 2. Grades, die wir leicht als R^2 erkennen. Den Kanten des Basiskegels $\mathfrak{K}$ des rotatorischen Polarbündels entsprachen die Berührungsebenen in ihnen; mithin entsprechen ihnen jetzt die dazu parallelen Ebenen durch S', die einen zu $\mathfrak{K}$ parallelen Kegel $\mathfrak{K}'$ umhüllen und sich mit den entsprechenden Kanten von $\mathfrak{K}$ in den Punkten des unendlich fernen Kegelschnitts des Erzeugnisses schneiden. Mithin geht $\mathfrak{K}$ nach diesem unendlich fernen Kegelschnitt und ist also parallel zu dem Asymptotenkegel der Fläche, und diese ist, da $\mathfrak{K}$ Rotationskegel um r ist, rotatorisch mit zu r paralleler Rotationsachse.

In unserer Correlation ($\mathfrak{C}$) entsprechen den Strahlen r, s, t, den Achsen des Polarbündels, die dazu senkrechten Ebenen aus S', was unmittelbar aus der Parallelverschiebung folgt; diese Ebenen seien ρ', σ', τ' genannt. Ihre Schnittlinien $\rho' \sigma' = t'$, $\sigma' \tau' = r'$, $\tau' \rho' = s'$ sind beziehentlich zu t, r, s parallel und bilden ein dreirechtwinkliges Dreikant, das wir „parallel" zu dem Dreikant r s t nennen wollen. Berücksichtigen wir noch, dass dem Strahl c durch S in ($\mathfrak{C}$) eine zu der γ' des Polarbündels parallele, daher auch auf c r normale Ebene γ' entsprechend wird, so erhalten wir folgende Konstruktion:

„Man lässt 3 zu einander normalen Strahlen r, s, t aus S die dazu senkrechten Ebenen ρ', σ', τ' aus S' entsprechen und ordnet ausserdem einem beliebigen Strahl c durch S eine zu c r normale Ebene γ' durch S' zu; damit ist eine Correlation ($\mathfrak{C}$) festgelegt, deren Erzeugnis eine R^2 ist, mit r als Rotationsachse."

Jede Correlation zwischen Bündeln besitzt, wenigstens wenn sie allgemein ist, nur ein Paar entsprechender dreirechtwinkliger Dreikante, die man als ein Paar Hauptdreikante bezeichnet. Man kann nun 2 correlative Bündel allgemein dadurch zu einem Polarbündel vereinigen, dass man die Hauptdreikante so in einander legt, dass entsprechende Elemente normal werden [1]). Für unsere soeben betrachtete Correlation ($\mathfrak{C}$) sind nun r s t und r' s' t' $\equiv \rho' \sigma' \tau'$ ein Paar Hauptdreikante, und zwar sind in ihnen schon entsprechende Elemente parallel; daher genügt auch eine Parallelverschiebung, um die Bündel zum Polarbündel zu vereinigen. In diesem Falle sind aber die Bündelscheitel für das Erzeugnis besondere Punkte, wie wir nun zeigen wollen, auch wenn die besondere Lage von γ' wie in ($\mathfrak{C}$) nicht statt hat. S liegt auf der Fläche und ist deren einer Schnitt mit r, der andere ist r ρ'. Ähnlich sind s σ' und t τ' die zweiten Schnitte von s und t mit der Fläche. Da ausserdem S' = $\rho' \sigma' \tau'$ auf ihr liegen muss, so bilden die beiden Hauptdreikante ein der Fläche einge-

[1]) Schroeter, Oberflächen 2. Ordnung, § 49.

schriebenes gerades rechteckiges Parallelopiped. Der Mittelpunkt M des Prismas ist Schnitt der 4 Diagonalen und halbiert diese, ist mithin konjugiert zu ihren unendlich fernen Punkten bezüglich der Fläche und folglich deren Mittelpunkt, SS' ist also Durchmesser. Wir haben also den Satz:

„Zwei correlative Bündel, in deren Hauptdreikanten entsprechende Elemente normal sind, erzeugen eine F^2, für die ihre Scheitel die Endpunkte eines Durchmessers sind."

Der gemeinsame unendlich ferne Punkt von 4 parallelen Kanten des Parallelopipeds hat zur Polarebene nach der Fläche die Verbindungsebene der Mitten der 4 Kanten; sie geht durch M und steht auf ihnen senkrecht, ist die zu der Richtung dieser Kanten konjugierte Durchmesserebene, und zwar ist sie eine Symmetrieebene der Fläche; und so liegt das ganze Prisma symmetrisch bezüglich der Symmetrieebenen der Fläche.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass, wenn wir die Bündelscheitel im Endlichen annehmen, auf die vorbeschriebene Weise ein Paraboloid nicht erzeugt werden kann, da bei ihm stets ein Endpunkt eines Durchmessers unendlich fern ist.

§ 22.

Verweilen wir noch etwas bei der aus 2 Durchmesserendpunkten erzeugten F^2 und dem dabei auftretenden geraden rechteckigen Parallelopiped. Die Ebene $\rho = (s\ t)$ schneidet aus der Fläche einen Kegelschnitt aus, dem das Begrenzungsrechteck des Parallelopipeds in ρ eingeschrieben ist, und dessen Centrum der Mittelpunkt des Rechtecks ist. Sei S_1 die Gegenecke im Rechteck zu S, so wird S_1 eingeschnitten von $r' = \sigma'\ \tau'$, und da die entsprechenden Ebenen aller Strahlen des Büschels (S, ρ) durch r' gehen müssen, so entstehen um S und S_1 in ρ projektive Strahlenbüschel, gebildet durch die Strahlen (S, ρ) und die Spuren ihrer correlativ entsprechenden Ebenen durch r'. Diese Büschel erzeugen den Schnittkegelschnitt in ρ, und zwar sind S und S_1 für ihn die Endpunkte eines Durchmessers; (s, t) und die

Spuren von σ' und τ' bilden das Paar entsprechender rechter Winkel. Ist nun aber die F^2 rotatorisch um r, so ist die Schnittkurve in ρ ein Kreis, und dieser wird aus den Endpunkten eines Durchmessers erzeugt durch projektive Büschel, in denen durchweg entsprechende Strahlen normal sind, die also ∞^1 Paare entsprechender rechter Winkel mit normalen entsprechenden Schenkeln besitzen. Jedes solche Paar vereinigt sich ersichtlich mit r bezw. r' zu einem Paar „paralleler[1])“ Hauptdreikante der Correlation, die ja dann eine (𝔈) ist. Also sehen wir:

„Unsere Correlation (𝔈) besitzt ∞^1 Paare „paralleler“ Hauptdreikante, mit r bezw. $r' = \sigma' \tau'$ als gemeinsamer Kante.“

Ein Spezialfall der allgemeinen R^2 ist die Kugel, die aus den Endpunkten eines Durchmessers durch orthogonale Bündel erzeugt wird, in denen durchweg entsprechende Elemente normal sind[2]). Diese Correlation hat offenbar ∞^3 Paare von „parallen“ Hauptdreikanten. In sie geht unsere (𝔈) über, wenn $\gamma' \perp c$ gewählt wird, denn dann hat sie 4 Paare normaler entsprechender Elemente, mithin lauter solche.

Der Asymptotenkegel ist parallel dem Kernkegel des bei Parallelverschiebung der Bündel bis zur Koinzidenz ihrer Scheitel entstehenden, am Schluss von § 19 erwähnten orthogonalen Polarbündels, d. h. er ist imaginär und besteht aus den isotropen Strahlen durch den Kugelmittelpunkt.

Zum Schluss untersuchen wir die Art der durch unsere (𝔈) erzeugten Mittelpunktsfläche. Sie ist Rotations-Ellipsoid oder -Hyperboloid, je nachdem der Asymptotenkegel imaginär oder reell ist. Das wird aber davon abhängen, ob der Basiskegel des Polarbündels, aus dem (𝔈) hervorging, imaginär oder reell ist, d. h. aber davon, ob bei der Wiedervereinigung c und die Schnittlinie von γ' mit cr auf verschiedene Seiten von r fallen oder auf dieselbe, oder auch, ob sie in verschiedene körperliche Ecken des Hauptdreikants fallen oder in dieselbe. Daher ergibt sich für unsere (𝔈):

---

[1]) S. 42.

[2]) Schroeter, Oberflächen 2. Grades, § 52 Ende

„Das Erzeugnis ist Hyperboloid oder Ellipsoid, je nachdem γ' diejenigen beiden Oktanten des zweiten Hauptdreikants durchschneidet, oder nicht, die ähnlich gelegen sind zu denen des ersten, in welchen c liegt.“

§ 23.

b. Durch ähnliche Betrachtungen wie in § 20 gelangen wir zu einer Erzeugung von Rotationsflächen 2. Grades durch correlative Felder. Wir gehen aus von der ebenen Polarcorrelation, deren Kernkurve ein Kreis ist (§ 18), lösen sie in zwei involutorisch correlative Felder Σ und Σ' auf und verschieben Σ' parallel mit sich und zwar in der Richtung normal zu Σ. Alsdann stehen die beiden Felder nur noch in Correlation $(\mathfrak{C}_1)$ und erzeugen durch die Verbindungsebenen entsprechender Elemente eine Fläche 2. Grades. Wir behaupten, es ist eine R^2. Zunächst sind die Mittelpunkte R und Q' der beiden Felder, da sie je der unendlich fernen Schnittlinie $\Sigma\Sigma'$ entsprechen, die Berührungspunkte von Σ und Σ'. Da aber Σ und Σ' parallele Tangentialebenen sind, so muss RQ' ein Durchmesser, und, da $RQ' \perp \Sigma$ ist, eine Achse der Fläche sein. In der Ausgangs-Polarcorrelation entspricht jedem Punkte des Kernkreises K die Tangente in ihm, und alle diese Tangenten umhüllen nach der Parallelverschiebung einem dem K kongruenten Kreis K', der dem K in $(\mathfrak{C}_1)$ entspricht. Die Verbindungsebenen entsprechender Elemente von K und K' umhüllen nun offenbar einen Rotationscylinder um RQ', dessen Ebenen dem Erzeugnis angehören. An dieses kommt also in der Richtung der Achse RQ' ein Rotationscylinder, und daraus folgt, dass es eine R^2 ist, mit RQ' als Rotationsachse.

Den unendlich fernen Punkten der Achsen a und b des Polarfeldes entsprachen bezw. b und a; in $(\mathfrak{C}_1)$ werden ihnen also entsprechen die zu a und b senkrechten Strahlen durch Q' in Σ'. Die zu CR senkrechte Polare c' im Polarfeld geht über in einen zu CR senkrechten Strahl c' in Σ'. Mithin erhalten wir folgende Konstruktion der $(\mathfrak{C}_1)$ zwischen den parallelen Ebenen Σ und Σ':

„Seien R und Q′ zwei auf derselben Normalen zu Σ und Σ′ gelegene Punkte von Σ und Σ′ und a und b zwei zu einander normale Strahlen durch R in Σ, so machen wir R zum Mittelpunkt von Σ und ordnen den unendlich fernen Punkten von a und b zwei zu a und b normale Strahlen durch Q′ in Σ′ zu, a′ und b′. Endlich lassen wir einem beliebigen Punkte C von Σ eine zu CR normale Gerade c′ in Σ′ entsprechen. Das Erzeugnis ist eine R^2 mit RQ′ als Rotationsachse.“

Für unsere ($\mathfrak{C}_1$) sind a, b und a′, b′ „Achsen“, wenn wir darunter allgemein solche normale Durchmesser des einen Feldes verstehen, deren konjugierte wieder normal sind. Eine allgemeine Correlation hat nur 2 Paare Achsen in allgemeiner Lage, und es besteht der Satz, man kann die correlativen Felder stets dadurch in ein Polarfeld zusammenlegen, dass man die nicht konjugierten Achsen aufeinander legt (Schroeter, Oberflächen, § 49). In unserem Falle sind nun die nicht konjugierten Achsen schon parallel, und daher genügt einfach die Parallelverschiebung in der Richtung RQ′ zur Erreichung von Polarcorrelation und umgekehrt wird durch Parallelverschiebung aus der Polarcorrelation des § 18 unsere ($\mathfrak{C}_1$) mit zu einander normalen konjugierten Achsen erhalten.

§ 24.

Die Verwendbarkeit der in § 23 hergestellten ($\mathfrak{C}_1$) erleidet aber eine Einschränkung, da wir annehmen, die beiden Feldebenen seien reell und im Endlichen gelegen. Die letztere Annahme schliesst die Erzeugung des Rotationsparaboloids aus, da bei ihm ein Endpunkt der Rotationsachse unendlich fern ist, und tangential in ihm die unendlich ferne Ebene. Es bleiben also nur noch die Fälle: verlängertes und verkürztes Rotationsellipsoid und zwei- und einschaliges Rotationshyperboloid. Unsere erste oben gemachte Voraussetzung aber schliesst die Erzeugung des letztgenannten aus, da bei ihm die Rotationsaxe nicht reell schneidet. Die allein als mög-

lich verbleibenden Fälle, Rotationsellipsoide und zweimanteliges Rotationshyperboloid, unterscheiden sich nun dadurch, dass bei jenen der Tangentialzylinder in der Richtung der Rotationsachse reell ist, bei diesem imaginär. Wir werden also den letzteren Fall erhalten, wenn in $(\mathfrak{C}_1)$ die Elemente C und c' so gewählt werden, dass die beim Zusammenlegen nicht konjugierter Achsen entstehende Polarcorrelation eine imaginäre Basis hat, d. h. C und der Schnitt seiner Polare mit CR auf verschiedenen Seiten von R liegen. Das bedeutet aber für $(\mathfrak{C}_1)$, es darf der Abschnitt von c' zwischen a' und b' nicht in demjenigen Quadranten liegen, der ähnlich gelegen ist zu dem, welcher C enthält. Im anderen Falle entsteht ein Ellipsoid, und dann können wir (§ 18, Zusatz) C und c' so wählen, dass sie beim Zusammenlegen der Felder zum Polarfeld incidieren, d. h. dass CR gleich dem Abstande von c' von Q' ist. Alsdann wird die Ebene (C c') Tangentialebene unseres Zylinders um RQ' als Achse, $\overline{CR}$ wird Zylinderradius und zugleich die gemeinschaftliche Länge der beiden weiteren Achsen der R^2 ausser RQ'.

Folglich ist unser Erzeugnis verkürztes oder verlängertes Rotationsellipsoid, je nachdem $\overline{RC} > RQ'$ oder $< RQ'$ ist; es wird Kugel, wenn $RC = RQ'$ ist, da dann alle 3 Achsen gleich sind.

„Das Erzeugnis unserer $(\mathfrak{C}_1)$ ist ein zweimanteliges Rotationshyperboloid oder ein Rotationsellipsoid, je nachdem C und der Abschnitt von c' zwischen a' und b' in unähnlich gelegenen Winkeln (a, b) und (a', b') liegen oder in ähnlich gelegenen. Macht man im letzteren Falle RC gleich dem Abstand des c' von Q', so erhält man ein verkürztes, ein verlängertes Rotationsellipsoid oder eine Kugel, je nachdem $\overline{RC} > \overline{RQ'}$, $< \overline{RQ'}$ oder $= \overline{RQ'}$ ist.

Diese Erzeugung der Kugel durch correlative Felder in diametralen Tangentialebenen ist das Gegenstück zu der bekannten durch correlative (orthogonale) Bündel in den Endpunkten eines Durchmessers. —

3. Rotationsflächen 2. Grades, erzeugt aus beliebigen Punkten und Ebenen.

§ 25.

a. Für die Erzeugung der R^2 durch correlative Bündel aus beliebigen Punkten S und S' gehen wir von dem schon früher benutzten Gedanken aus, dass 1. in 2 correlativen Bündeln solche entsprechende Strahlen von S und Ebenen von S', die parallel sind, den unendlich fernen Kegelschnitt k_∞ erzeugen, wobei die Strahlen einen von S nach k_∞ gehenden Kegel K bilden; und dass 2. das Erzeugnis R^2 ist, wenn K ein Rotationskegel ist. Machen wir nun die Bündel durch Parallelverschiebung konzentrisch, so erhalten wir eine Bündelcorrelation (S), und zwar fallen die Strahlen von K in ihre entsprechenden Ebenen hinein, bilden also den Strahlenkernkegel von (S). Unsere Fläche ist R^2, wenn K ein Rotationskegel ist; also besteht unsere Aufgabe darin, eine Correlation (S) im Bündel S aufzusuchen, deren Strahlenkernkegel ein Rotationskegel ist. —

Ist unsere Fläche elliptisch, dann sind k_∞ und K imaginär, also auch der Strahlen- (und Ebenen-) Kernkegel in (S), und wir müssen uns den Rotationskegel, den wir zum Strahlenkernkegel unserer Correlation (S) machen wollen, durch sein Polarsystem gegeben denken, dieses aber haben wir uns bereits in § 19 hergestellt. Den für uns wichtigen Zusammenhang zwischen den Elementen der Correlation und dem Polarsystem ihres Strahlenkernkegels liefert uns die Uebertragung des in den „Vorlesungen“ von Schroeter, Oberflächen 2. Ordnung, § 50, S. 432 für die ebene Correlation ausgesprochenen Satzes auf die Bündelcorrelation. Wir erhalten dann für diese:

„Wenn man einen Strahl $x = y'$ mit dem Schnittstrahl seiner (im allg. nicht durch ihn gehenden) Polarebenen ξ' und η durch eine Ebene σ verbindet und zu ξ', η und σ die 4. harmonische, der σ zugeordnete Ebene ξ konstruiert, so sind x und ξ polar bezüglich des Strahlenkernkegels der Bündelcorrelation.“

Da nun das Polarsystem eines Kegels durch 2 beliebige Paare polarer Elemente und 1 Paar konjugierter Strahlen eindeutig bestimmt ist[1]), so werden wir bestrebt sein müssen, die gesuchte Correlation (S) so zu bestimmen, dass 2 nach obigem Satze bestimmte Elementepaare x, ξ Polarstrahl und Polarebene und einmal ein Strahl und ein solcher der ihm nach jenem Satze zugeordneten Ebene konjugiert in dem gegebenen rotatorischen Polarsystem sind. Alsdann sind der Strahlenkernkegel von (S) und der vorgelegte Rotationskegel identisch.

Die Lösung unserer Aufgabe wird dadurch erleichtert, dass eine Bündelcorrelation ein ausgezeichnetes Dreikant besitzt von der Beschaffenheit, dass einer Kante w ihre Gegenebene ω, jeder der beiden in ω gelegenen Kanten aber die durch sie gehende Ebene involutorisch entspricht. Das Paar w, ω ist nun stets reell. Konstruiert man zu w nach obigem Satze die Polarebene nach dem Strahlenkernkegel, so ist diese ω, da in ω die dem w entsprechenden Ebenen zusammenfallen; wir können also ein Paar polarer Elemente des gegebenen Rotations-Polarbündels (R) als dieses Paar w, ω der gesuchten (S) wählen. — Ferner hat w die Eigenschaft, dass alle doppelt konjugierten Strahlen, d. h. jeder Strahl und der Schnittstrahl seiner beiden entsprechenden Ebenen, ihre Verbindungsebene durch w senden, und ebenso schneidet sich jede Ebene mit ihrer doppelt konjugierten, d. h. mit der Verbindungsebene ihrer beiden entsprechenden Strahlen, auf ω. Beachten wir die 3 erörterten Punkte:

1. Das Vorhandensein eines involutorischen, stets reellen Paares,
2. die Herstellung der Polarebene nach dem Strahlenkernkegel zu einem beliebigen Strahl, und
3. die erörterte Lage doppelt konjugierter Elemente, so kommen wir zu folgender Konstruktion unserer Bündelcorrelation (S):

„Im Bündel S liege ein rotatorisches Polarsystem (R) vor. w und ω, d und δ seien polar in (R), aber weder

[1]) Steiner-Schroeter, Kegelschnitte, § 58, Nr. 7.

unter sich, noch gegenseitig inzident. Wir ziehen die Ebene (w d), schneiden sie mit δ in d_1, legen durch d_1 eine beliebige Ebene δ_1 und konstruieren zu (wd), δ und δ_1 die 4. harmonische Ebene δ_2, der δ_1 zugeordnet. Sei e ein beliebiger Strahl von δ_2 und d mit dem zweiten Namen e' bezeichnet. Seien endlich f und f' konjugiert in (R) und in einer Ebene durch w gelegen. Alsdann treffen wir folgende Zuordnung:

$$\begin{bmatrix} w & \omega & d & e & f \\ \omega & w & \delta_1 & e' & f' \end{bmatrix}.“$$

Dass durch die Bestimmung, w, ω, d sollen zu ω, w, δ_1 polar und e, f zu e', f' konjugiert sein, eine Correlation eindeutig festgelegt wird, setzen wir als bekannt voraus[1]). Wir bezeichnen sie mit (S) und beweisen nun, dass ihr Strahlenkernkegel das Polarsystem (R) besitzt.

Zunächst werden w und ω das Paar reeller, nicht inzidierender, sich involutorisch entsprechender Elemente der Correlation (S), sind also polar nach ihrem Strahlenkernkegel. Ferner ist in (S) δ_1 die eine Polarebene von d; die zweite Polarebene von d (= e') muss sich mit δ_1 in dem doppelt konjugierten Strahl von d schneiden, folglich, wie oben bemerkt, auf der Ebene (d w) und damit in dem Schnittstrahl von δ_1 mit (d w), das ist aber der Strahl d_1. Andererseits ist dem Strahl e' = d konjugiert e; mithin muss die 2. Polarebene von d in (S) auch durch e gehen, muss also die Ebene (d_1 e) sein, d. i. aber δ_2. Dem Strahl d ist also in (S) doppelt konjugiert d_1. Nun ist δ die 4. harmonische Ebene zu δ_1, δ_2 und (d w), der letzteren zugeordnet, mithin muss δ zu d polar sein bezüglich des Strahlenkernkegels von

---

[1]) Crelles Journal, Bd. 62. S. 215. H. Schroeter: „Problematis . . . solutio nova“ § 2, S. 219: Datis in plano E quinque punctis . . . Vergl. ausserdem Hirst „On the correlation of two planes“ (Proceedings der London Mathematical Society, vol. V, S. 40—70). Unsere Correlation ist durch 8 lineare Bedingungen festgelegt und hat, wenn wir die Hirstschen Resultate zwecks ihrer Anwendung auf den Bündel dualisieren, die Signatur [2120]. Damit ist aber (vgl. Hirsts Tabelle zu Nr. 42) eine Correlation eindeutig bestimmt.

(S). Endlich sind f und f' konjugiert in (S), mithin, da in einer Ebene durch w gelegen, doppelt konjugiert. Alsdann sind sie aber konjugiert bezüglich des Strahlenkernkegels, denn konstruiert man die Polarebene von f nach letzterem, so sieht man, sie geht durch f'.

Mithin haben wir nun w und ω, d und δ als polar, f und f' als konjugiert bezüglich des Strahlenkernkegels von (S) erkannt. Damit aber ist eindeutig das Polarsystem eines Kegels bestimmt[1]). Und da, wie wir wissen, jene Elementenpaare auch dem Polarbündel (R) angehören, so muss der Strahlenkernkegel von (S) mit der Basis von (R) identisch sein, d. h. aber, ein Rotationskegel. Diese Konstruktion der (S) verdanke ich Herrn Professor Sturm.

Verschieben wir den zweiten Bündel von (S) beliebig parallel im Raume, so entsteht, wie oben gezeigt, eine Correlation, die zum Erzeugnis eine R^2 besitzt. In dieser Correlation aber sind entsprechende Hauptdreikante, zum Unterschied von der in § 21 besprochenen Correlation, nicht parallel. Unsere so erzeugte R^2 ist nun offenbar Hyperboloid oder Ellipsoid, je nachdem der Basiskegel des rotatorischen Polarsystems (R) reell oder imaginär ist.

§ 26.

Zum Schluss wollen wir noch die Mannigfaltigkeit der auf die in § 25 besprochene Art erzeugten Rotationsflächen 2. Grades untersuchen. In einem Bündel S gibt es ∞^3 rotatorische Polarbündel, nämlich ∞^2 Lagen der Rotationsachse und bei jeder ∞^1 Werte der Potenz des Involution konjugierter Strahlen in irgend einer Meridianebene. Zu jedem solchen Polarbündel (R) haben wir eine Correlation (S) herzustellen. Die Ebene ω ist auf ∞^2 Arten wählbar, w jedesmal bestimmt; für die Wahl von δ haben wir ∞^2 Möglichkeiten, jeder Lage gehört ein bestimmtes d zu. (w d) ist bestimmt, d_1 auch, dagegen ist δ_1 auf ∞^1 Weisen wählbar, δ_2 bestimmt; e kann ∞^1 Lagen einnehmen, f ∞^2 Lagen, f' ist jedesmal bestimmt. Somit würden wir zu ∞^8

[1]) Steiner-Schroeter, 3. Aufl. S. 410, Nr. 7.

Correlationen (S), zum Bündel (R) gehörig, kommen. Das ist zu viel, denn es wäre die Gesamtheit aller Correlationen im Bündel überhaupt. Es gibt im Bündel ∞^5 Kegel, jeder kann zum Strahlenkernkegel einer Correlation gemacht werden, und zwar kommen wir so zu allen möglichen Correlationen des Bündels, also zu ∞^8. Daher gehören zu jedem Kegel ∞^3 Correlationen, und so auch zu jedem (R) ∞^3 (S), und da wir im Bündel S ∞^3 (R) haben, so haben wir ∞^6 (S). Bei der Parallelverschiebung im Raum kann nun jeder Scheitel ∞^3 Lagen einnehmen, wir haben also ∞^6 Combinationen der beiden Scheitel und kommen so zur Mannigfaltigkeit ∞^{12} für alle möglichen Correlationen des § 25. Das ist natürlich zu hoch. Liegt eine F^2 oder R^2 vor, so kann sie aus je 2 ihrer Punkte auf ∞^1 Weisen durch correlative Bündel erzeugt werden. Jeder Scheitel kann auf der Fläche ∞^2 Lagen einnehmen, wir haben ∞^4 Paare von Scheiteln, also ∞^5 Correlationen, die unsere Fläche erzeugen. Von den ∞^{12} Correlationen, die wir oben fanden, erzeugen also immer ∞^5 dieselbe R^2, da wir so alle im Raume möglichen Correlationen (S) erhalten mussten, und so schrumpft die Mannigfaltigkeit der auf unsere Weise erzeugten R^2 auf ∞^7 zusammen, d. i. aber gerade die Anzahl aller R^2 des Raumes, und so sehen wir, unsere Erzeugung liefert uns jede R^2, wenigstens jede centrische, mit endlichem Mittelpunkt versehene, da das Ausscheiden der Paraboloide die Mannigfaltigkeit nicht verringert.

§ 27.

b. Für die Herstellung einer Correlation (P), die eine R^2 aus beliebig gegebenen Ebenen Σ und Σ' erzeugt, bedienen wir uns des Kriteriums, dass der Asymptotenkegel einer R^2 rotatorisch ist, und benutzen, da er, wie bei den Ellipsoiden, imaginär sein kann, sein Polarsystem (R); auch hier beschränken wir uns also auf die Herstellung von Mittelpunktsflächen. Zwischen einer solchen und ihrem Asymptotenkegel bestehen einfache Beziehungen. Da der Asymptotenkegel nach dem unendlich fernen Kegelschnitt der

Fläche geht, so schneidet sein Polarsystem in die unendlich ferne Ebene dasselbe Polarfeld ein, wie der Polarraum der Fläche. Daraus erkennt man leicht den Satz:

„Ein Durchmesser der Fläche und seine konjugierte Durchmesserebene sind polar bezüglich des Asymptotenkegels."

Jedem Durchmesser ist ferner konjugiert der unendlich ferne Strahl der konjugierten Durchmesserebene; durchläuft ein Punkt X einen Durchmesser, so dreht sich seine Polarebene nach der Fläche um den unendlich fernen Strahl der konjugierten Durchmesserebene und beschreibt ein Parallelebenenbüschel, dem die konjugierte Durchmesserebene angehört, als Polarebene des unendlich fernen Punktes. Folglich erhalten wir, unter Hinzuziehung des ersten Satzes:

„Einem Punkte X ist polar nach der F^2 eine Ebene ξ, die parallel ist zu der dem Durchmesser nach X bezüglich des Asymptotenkegels polaren Ebene ξ^*."

„Ist X ein Punkt der F^2, so ist ξ die Parallelebene durch ihn zu ξ^*."

Soll nun das Erzeugnis der correlativen Felder Σ und Σ' eine R^2 sein, so müssen wir die Correlation so einrichten, dass das Polarsystem des Asymptotenkegels rotatorisch wird, d. h. identisch mit einem rotatorischen Polarsystem (R). Diese Identität ist gesichert, wenn beide Polarsysteme 3 Paar polarer Elemente gemeinsam haben; es würde zwar genügen, dass das dritte Paar aus konjugierten Elementen besteht, doch wird später von dem ersten Kriterium der Identität Gebrauch gemacht.

Das Centrum C sowie die Rotationsachse von (R) sind an und für sich beliebig zu legen; es ist aber dafür Sorge zu tragen, dass C wirklich Centrum wird.

§ 28.

Die Feldebenen Σ und Σ' werden Tangentialebenen des Erzeugnisses, die ihrer Schnittlinie $\mathfrak{f}$ entsprechenden Punkte S und S_1' werden die Berührungspunkte. Infolgedessen wird $S\,S_1'$ zu $\mathfrak{f}$ polar bezüglich der Fläche, denn die Polar-

ebenen aller Punkte von $\Sigma\,\Sigma' = \mathfrak{f}$ müssen durch die Verbindungslinie der Pole von Σ und Σ' gehen, das sind aber S und S_1'. $S\,S_1'$ gehört also zu der Schar paralleler Sehnen, die von der Durchmesserebene durch $\mathfrak{f}$ halbiert werden, daher ist die Verbindungsebene δ von $\mathfrak{f}$ mit der Mitte M von $S\,S_1'$ eine Durchmesserebene, ihr konjugierter Durchmesser ist zu $S\,S_1'$ parallel; er heisse d. Wir wissen, d ist dann zu δ polar bezüglich des Asymptotenkegels. Ist C das Centrum, und seien s und s_1' die Durchmesser nach S bezw. S_1', so sind diese bezw. polar zu den parallelen Durchmesserebenen σ und σ' zu Σ und Σ', bezüglich des Asymptotenkegels.

Aus diesen Erörterungen fliesst: wir haben C so zu legen, dass 1. $S\,S_1'$ durch $\mathfrak{f}\,C = \delta$ halbiert wird, etwa in M, und 2. $S\,S_1'$ parallel wird zu demjenigen Strahl d, welcher der δ in (R) polar ist.

Nehmen wir zunächst die Lagerung von C vor. Wir denken uns σ und σ' festgelegt, damit s und s'_1, und lassen nun C über eine beliebige Gerade l laufen. Dann beschreiben S und S_1' ähnliche Punktreihen t und t_1' in Σ und Σ', ihre Verbindungslinien erzeugen daher die eine Regelschar eines hyperbolischen Paraboloids. Wir fragen nach solchen Lagen von C auf l, bei denen δ durch die Mitte M von $S\,S_1'$ geht. Die Mitten M aller bei unserer Bewegung erhaltenen Strecken $S\,S_1'$ liegen auf einer Geraden m der Leitschar jenes Paraboloids, zu der ja auch t und t_1' gehören, und bilden auf m eine Punktreihe, welche ähnlich ist zu den von S, S_1' und C beschriebenen. Die Ebene δ bewegt sich dabei in dem Büschel um $\mathfrak{f}$ perspektiv zu C, also projektiv zu M, sie schneidet in m eine Punktreihe ein, die zu der von M beschriebenen konjektiv ist; also fallen zweimal 2 entsprechende Punkte auf einander. Nach diesen beiden Punkten gehen solche Ebenen δ, die durch das zugehörige M gehen, also die gewünschte Eigenschaft haben. Auf jeder Geraden l des Raumes liegen also 2 Punkte C, die unserer ersten Forderung genügen, mithin erfüllen alle möglichen geeigneten Punkte

C eine Fläche 2. Grades. Diese erweist sich jedoch als ein Ebenenpaar mit $\mathfrak{f}$ als Doppelgerade.

Denn sei l eine Gerade, welche die $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{L}$ trifft, so werden die von S und S_1' beschriebenen Punktreihen t und t_1' perspektiv mit unendlich fernem Perspektivitätscentrum. Daher bilden die Mittelpunkte der Strecken SS_1' einen Strahl m des Büschels t, t_1'. Die Ebene $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{f}$ nach dem zugehörigen C auf l ist nun fest und trifft die e allein in $\mathfrak{L}$. Sollte sie aber die Gerade l in sich aufnehmen, so gehört dann jeder Punkt von l, also auch $\mathfrak{L}$, der Fläche an. Zieht man dann eine einer solchen l parallele Gerade, welche auch die $\mathfrak{f}$ trifft, und lässt C auf ihr wandern, so verschiebt sich die ganze Figur nur parallel, auch diese l gehört der Fläche an und so die ganze von diesen Parallelen erfüllte Ebene durch $\mathfrak{f}$. Es muss nun, da die Ordnung der von den geeigneten Punkten C erfüllten Fläche 2 ist, noch eine zweite solche Ebene durch $\mathfrak{f}$ existieren, die zusammen mit der ersten die Fläche ausmacht, so dass diese ein Ebenenpaar mit $\mathfrak{f}$ als Doppelgerade ist. Ihre Ebenen sind nicht linear herstellbar und können auch imginär sein.

Die zweite Forderung, die wir C auferlegen mussten, war: Ziehen wir durch C zu SS_1' die Parallele d, so muss diese zu $\mathfrak{d}$ polar sein in (R). Diese Forderung ist aber von selbst erfüllt bei den Punkten C, die der ersten Bedingung genügen, wie wir nun zeigen wollen. Wir nehmen also einen solchen Punkt C mit den zugehörigen Strahlen s und s_1' und Punkten S und S_1' und schneiden mit der Ebene (ss_1'); dabei werde $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{S}$ getroffen; der Strahl C$\mathfrak{S}$ heisse d', der Parallelstrahl durch C zu SS_1' sei d. Zu s und s_1' sind polar bezüglich (R) die zu Σ und Σ' parallelen Ebenen σ und σ' durch C; die Polarebene von d heisse δ^*. Diese 3 Ebenen σ, σ', δ^* schneiden sich, da ihre Polarstrahlen in (ss_1') liegen, in derselben Geraden, nämlich in der zu $\mathfrak{f}$ durch C parallelen Schnittlinie von σ und σ'. Wir schneiden sie mit SS_1' in $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{D}^*$; dann sind diese Punkte beziehentlich gepaart mit S, S_1' und dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{D}_\infty$ von SS_1' in der von (R) auf SS_1' eingeschnittenen Involution konjugierter Punkte. Ist nun M die Mitte von SS_1', so ist

$\Delta\ C\ \mathfrak{s}\ M \sim \mathfrak{S}\ S\ M$ und
$\Delta\ C\ \mathfrak{s}'\ M \sim \mathfrak{S}\ S_1'\ M$, daher

$$\frac{\mathfrak{s}M}{SM} = \frac{CM}{\mathfrak{S}M} = \frac{\mathfrak{s}'M}{S_1'M} \text{ also}$$

$\mathfrak{s}M = \mathfrak{s}'M$, da $MS = MS_1'$ ist.

Es ist also auch

$$SM \cdot \mathfrak{s}M = \mathfrak{s}'M \cdot S_1'\ M,$$

und damit erkennt man M als das Centrum der betrachteten Involution, gepaart mit $\mathfrak{D}_\infty$; also ist $\mathfrak{D}^*$ mit M identisch Mithin geht die Polarebene von d durch M und ist, weil sie durch die in δ gelegene Schnittlinie $\sigma\sigma'$ gehen muss, mit δ identisch, d und δ sind polar in (R). Unser Punkt C erfüllt demnach in der Tat von selbst die zweite, ihm auferlegte Bedingung. —

§ 29.

Die Mittelpunkte der correlativen Felder Σ und Σ' liegen auf 2 Geraden m und m_1', die eingeschnitten werden von den zu Σ' und Σ parallelen Tangentialebenen $\bar{\Sigma}'$ und $\bar{\Sigma}$, welche von dem Centrum C denselben Abstand haben wie Σ' und Σ. Ihre Berührungspunkte $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}$ liegen auf den Durchmessern s_1' und s, und zwar so, dass

$$C\mathfrak{S} = SC \text{ und } C\mathfrak{S}_1' = S_1'C \text{ ist.}$$

Die Ebenen $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}'$ haben aber ebenfalls σ und σ' zu parallelen Durchmesserebenen und liefern so für den Asymptotenkegel keine neuen polaren Elemente.

Sei nun ε_1 eine beliebige Ebene durch den der δ in (R) polaren Durchmesser d, so ist ihr Polarstrahl e bezüglich (R) in δ gelegen; er schneide $\mathfrak{f}$ in E. Diejenige Tangentialebene φ der Fläche, deren Berührungspunkt F auf e liegt, und die Polarebene ε von E bezüglich der Fläche sind unter einander parallel, müssen es aber auch sein zu der dem e bezüglich des Asymptotenkegels polaren Ebene, d. h., da (R) Asymptotenkegel sein soll, zu ε_1. Nun geht aber, da $\mathfrak{f}$ und SS_1' bezüglich der Fläche polar sind, ε durch SS_1', ist also durch ε_1 bestimmt. Um F zu erhalten, denken wir daran,

dass auf e eine Involution von bezüglich der Fläche konjugierten Punkten entsteht, in der C Centralpunkt ist und E und der Schnittpunkt $\mathfrak{E}$ von ε mit e gepaart sind. Der eine Doppelpunkt dieser Involution ist F, und φ ist dann, da zu ε_1 parallel, festgelegt.

Unsere Betrachtungen führen uns nun zu folgender Konstruktion einer eine R^2 erzeugenden Correlation (P):

„Den gegebenen rotatorischen Polarbündel (R) mit dem Scheitel C legen wir so, dass die Strahlen s und s_1', die den Parallelebenen σ und σ' durch C zu Σ und Σ' polar sind, in Σ und Σ' zwei Punkte S und S_1' einschneiden, deren Verbindungslinie durch die Ebene δ von C nach dem Schnittstrahl $\Sigma\Sigma' = \mathfrak{f}$ halbiert wird. Wir tragen CS und CS'_1 von C aus auf s und s'_1 nach der anderen Seite ab, bis $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1'$, legen durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1'$ zu Σ und Σ' die Parallelebenen $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}'$ und schneiden sie mit Σ' und Σ in m_1' und m; $m_1{}^\infty$ und $m'{}_\infty$ seien die unendlich fernen Geraden von Σ und Σ'. Durch den zu SS_1' parallelen Strahl d aus C legen wir eine beliebige Ebene ε_1, deren Polarstrahl e nach (R), wie bewiesen wurde, in δ liegt. Er schneide $\mathfrak{f}$ in E; die zu ε_1 parallele Ebene durch SS_1' sei ε, ihr Schnitt mit e sei $\mathfrak{E}$. In der durch E, $\mathfrak{E}$ als ein Paar und C als Centralpunkt bestimmten Involution auf e suchen wir einen Doppelpunkt F und ziehen durch F die Parallelebene φ zu ε. F_1 sei ein Punkt ihrer Spur f_1 in Σ, f_1' ihre Spur in Σ'. Alsdann treffen wir die Zuordnung

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{f} & S & F_1 & m & m_1{}^\infty \\ S_1' & \mathfrak{f} & f_1' & m'{}_\infty & m_1' \end{bmatrix}.$$

Durch diese Zuordnung ist eindeutig eine Correlation festgelegt, denn wir haben 3 Paar polarer und 2 Paar konjugierter Elemente gegeben[1]).

---

[1]) Hirst „On the correlation of two planes", s. Anm. zu S. 50 Unsere Correlation hat die Signatur [2102], die, wie Hirst in Nr. 42 zeigt, mit [2120] identisch ist, also wie die S. 50 benutzte [2120] nur zu einer Correlation führt.

§ 30.

Wir haben nun noch nachzuweisen, dass das Erzeugnis unserer Correlation (P) wirklich eine Rotationsfläche ist; wir weisen nach, dass der Asymptotenkegel das Polarsystem (R) hat. Zunächst ist C Mittelpunkt der Fläche. Denn da S und S_1' als entsprechende Punkte von $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte von Σ und Σ' werden, so wird die Ebene von $\mathfrak{f}$ nach der Mitte von SS_1' Durchmesserebene, d. i. aber δ, und δ ist somit ein Ort für den Mittelpunkt unserer Fläche. Da ferner $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}'$ die zu Σ und Σ' parallelen Tangentialebenen der Fläche werden, weil sie die unendlich fernen Geraden dieser Ebenen mit ihren entsprechenden Punkten verbinden, so muss das Centrum der Fläche in den Mittelparallelebenen σ und σ' zwischen Σ und $\bar{\Sigma}$, Σ' und $\bar{\Sigma}'$ liegen. In beiden und in δ liegt aber unser C, mithin ist C das Centrum der erzeugten Fläche, und da nun S und S'_1 die Berührungspunkte von Σ und Σ' werden, so sind s und σ, s'_1 und σ' polar bezüglich des Asymptotenkegels.

Da ferner die Ebene ε durch SS_1' geht und $\mathfrak{f}$ zu SS_1' polar ist, so liegt der Pol von ε nach der Fläche auf $\mathfrak{f}$. Infolge der Zuordnung F_1, f_1' wird φ Tangentialebene des Erzeugnisses, und da sie zu ε parallel ist, so liegt ihr Berührungspunkt auf dem Durchmesser nach dem Pol von ε, d. h. aber in δ. Auf diesem Durchmesser liegt eine Involution konjugierter Punkte bezüglich der Fläche; ihr Centralpunkt ist C, gepaart sind der Schnitt von ε und der Pol von ε, also der Schnitt mit $\mathfrak{f}$, Doppelpunkt muss sein der Schnitt mit φ. Diesen Bedingungen genügt nur ein Strahl durch C in δ, nämlich unser e, wie wir nun zeigen wollen. Seien e und f die (parallelen) Spuren von ε und φ in δ, und E^*, $\mathfrak{E}^*$ und F^* die Schnittpunkte des gesuchten Durchmessers e^* mit $\mathfrak{f}$, e und f; dann ist F^* folgendermassen zu bestimmen: Wir verbinden C mit dem Schnittpunkt X von $\mathfrak{f}$ und f, schneiden die Verbindungslinie mit e in Y und ziehen durch Y zu $\mathfrak{f}$ die Parallele. Ihr Schnittpunkt mit f ist der gesuchte F^*. Denn dann ist

$$CE^* : CF^* = CX : CY = CF^* : CE^*,$$

also $$\overline{CF}^{*2} = CE^* \,.\, C\mathfrak{E}^*.$$

Es gibt also in der Tat nur einen Strahl e*; da aber e unserer Konstruktion gemäss die von e* geforderten Bedingungen erfüllt, so ist e* mit e identisch, E also Pol von ε, F Berührungspunkt von φ und FC = e polar zu ε_1 bezüglich des Asymptotenkegels.

Es sind also bereits die 3 Paare s, σ; s_1, σ'; e, ε_1 als polar nach dem Asymptotenkegel erkannt. Da sie aber in allgemeiner Lage sind, und im Polarbündel (R) ebenfalls polar sind, so ist der Asymptotenkegel der Fläche mit der Basis von (R) identisch, also rotatorisch, und mit ihm die Fläche. Diese ist Rotations-Ellipsoid oder -Hyperboloid, je nachdem (R) eine imaginäre oder eine reelle Basis besitzt. —

Es drängt sich nun noch die für die Abzählung der Mannigfaltigkeit wichtige Frage auf, ob unsere Correlation (P) sich ändert, wenn wir statt der Ebene ε_1 eine andere Ebene $\bar{\varepsilon}_1$ durch d wählen. Durch die (P) ist eine ganz bestimmte R^2 festgelegt. Ist $\bar{e}$ der (in δ gelegene) Polarstrahl von $\bar{\varepsilon}_1$ in (R), so sind, da (R) Asymptotenkegel für die R^2 ist, $\bar{\varepsilon}_1$ und $\bar{e}$ Durchmesserebene und konjugierter Durchmesser für die R^2. Ferner sind $\bar{E}$ (der Schnitt von $\bar{e}$ mit ∫) und die zu $\bar{\varepsilon}_1$ parallele Ebene $\bar{\varepsilon}$ durch SS_1' polar in Bezug auf die R^2; daher sind in der Involution bezüglich der R^2 konjugierter Punkte gepaart $\bar{E}$ und der Schnitt $\bar{\mathfrak{E}}$ von $\bar{\varepsilon}$ mit $\bar{e}$; ihr Centralpunkt ist C. Wir nehmen einen Doppelpunkt $\bar{F}$ und legen durch ihn zu $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\varepsilon}_1$ die Parallelebene $\bar{\varphi}$; sie muss dann Tangentialebene der R^2 sein. Sie schneidet daher in Σ und Σ' zwei Geraden $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_1'$ ein, die in (P) konjugiert sind.

Folglich hat die $\bar{f}_1'$ ihren Pol nach (P) auf $\bar{f}_1'$; er sei $\bar{F}_1$, Dann ist die durch die Zuordnung

$$\begin{bmatrix} \int & S & \bar{F}_1 & m & m_1{}^{\infty} \\ S_1' & \int & \bar{f}_1' & m'_{\infty} & m_1' \end{bmatrix}$$

eindeutig festgelegte Correlation mit (P) identisch; denn jene Elemente gehören auch der (P) an, wie für $\bar{F}_1$ und $\bar{f}_1'$

bewiesen wurde, während die übrigen gemeinschaftlich zur Bestimmung dienen.

Die Ebene $\bar{\varphi}$ wurde nun aus $\bar{\varepsilon_1}$, $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{e}$ genau so erhalten wie φ aus ε_1, ε und e. Wir sehen also:

Wenn ε_1 geändert wird, so ändern sich f_1 und f_1', die Spuren der jedesmal auf die in § 29 erörterte Weise konstruierten φ in Σ und Σ'. Auf der betreffenden f_1 lässt sich aber stets ein F_1 so finden, dass, wenn man dies F_1 als Pol des f_1' wählt, die entstehende Correlation mit der ursprünglichen (P) identisch wird. So zeigt sich, dass die Veränderung der Ebene ε_1 auf die Mannigfaltigkeit der Correlationen (P) keinen Einfluss hat, wohl aber die Lage von F_1 auf f_1.

Zählen wir nun ab, wie viele Correlationen uns unsere Konstruktion liefert. Der Polarbündel (R) sei seiner Lage im Raume nach gegeben. Wir können dann den Scheitel C, wie wir fanden, auf ∞^2 Weisen in die richtige Lage (s. § 28) bringen. Mit C sind σ und σ' festgelegt, ebenso s und s_1', S und S_1', δ und d. E können wir beliebig auf $\mathfrak{f}$ wählen und durch Wahl des zugehörigen F_1 es doch so einrichten, dass stets dieselbe Correlation entsteht. Mit E ist e, ε und F, damit φ und f_1 und f_1' bestimmt. Dagegen ist F_1 auf ∞^1 Weisen auf f_1 wählbar; wir erhalten also bei der Lage nach gegebenen Bündel (R) $\infty^{2-1} = \infty^3$ Correlationen in Σ und Σ'. Berücksichtigen wir nun erstens, dass bei festgehaltener Achse der Bündel (R) noch ∞^1 Werte der Potenz der Involution konjugierter Strahlen in irgend einer Meridianebene besitzt, die Achse aber in ∞^2 Lagen gebracht werden kann; zweitens, dass Σ uud Σ' je ∞^3 Lagen im Raume einnehmen können, so erhalten wir für sämtliche Correlationen (P) die Mannigfaltigkeit $\infty^{3-1+2+2\cdot 3} = \infty^{12}$, also ∞^{12} R^2. Nun kann aber jede solche auf ∞^5 Weisen aus ihren Tangentialebenen erzeugt werden, aus analogen Gründen, wie sie bei der Erzeugung aus ihren Punkten erörtert wurden (S. 52); also schrumpft die Mannigfaltigkeit unserer R^2 auf ∞^7 zusammen, das sind aber alle Rotationsflächen 2. Grades im Raume. Wir erhalten somit durch unsere Erzeugung alle R^2, wenigstens die centrischen.

4. Das rotatorische räumliche Polarsystem.

§ 31.

Als Erzeugnisse projektiver Gebilde 3. Stufe treten die R^2 auf, insofern sie Basen von räumlichen Polarcorrelationen sind. Eine solche ist bestimmt durch ein Polartetraeder und ein beliebiges Paar Pol und Polarebene. Jeder Punkt scheidet einen Polarbündel aus dem Polarraum aus, das Centrum C den Polarbündel des Asymptotenkegels der Fläche, und zwischen der Polarität bezüglich der Fläche, d. h. des Polarraumes, und des Asymptotenkegels bestehen die in § 27 abgeleiteten Beziehungen. Die 3 Symmetrieebenen der Fläche bilden das Hauptdreiflach des Asymptotenkegels und liefern, zusammen mit der unendlich fernen Ebene, ein Polartetraeder. Dieses kann zur Bestimmung des Polarraumes benutzt werden; das 4. Paar polarer Elemente ist dann so zu bestimmen, dass der Polarbündel, der im Bündel C entsteht, rotatorisch ist. So erhalten wir folgende Konstruktion:

„Wir wählen als Polartetraeder drei zu einander senkrechte Ebenen mit den Schnittstrahlen r, s, t, und die unendlich ferne Ebene. Einem beliebigen Punkte X des Raumes ordnen wir ferner eine Ebene ξ zu, die senkrecht steht auf der Verbindungsebene von X mit r, und die nicht durch C geht. Die so festgelegte Polarcorrelation hat zur Basis eine R^2 mit r als Rotationsachse."

Denn der durch C ausgeschiedene Polarbündel hat r, s, t zu Hauptachsen; ferner sind polar im Polarraum CX und der unendlich ferne Strahl von ξ, also sind polar in dem durch C ausgeschiedenen Polarbündel CX und die zu ξ parallele Ebene durch C. Diese steht aber auf der Verbindungsebene von CX mit r senkrecht, folglich ist unser Polarbündel rotatorisch, und, da seine Basis Asymptotenkegel ist, auch unsere Kernfläche des Polarraumes. Diese wird Hyperboloid oder Ellipsoid, je nachdem die Parallelebene durch C zu ξ denjenigen Oktanten der Hauptebenen durchschneidet oder nicht, in dem X liegt; denn im ersten

Fall wird der Asymptotenkegel reell, im zweiten imaginär. Der zweite Fall führt uns auch zu dem Fall der imaginären R^2.

Betrachten wir im zweiten Falle die Involution konjugierter Punkte auf CX, so ist diese hyperbolisch und die Fläche dann reell, wenn X und der Schnitt von ξ mit CX auf derselben Seite von C liegen; sie ist elliptisch, die Fläche imaginär, wenn X und jener Schnittpunkt auf verschiedenen Seiten von C gelegen sind. Die imaginäre R^2 haben wir bei unseren früheren Untersuchungen stets ausgeschlossen.

Lebenslauf.

Ich, Gerhard Müth, evangelischer Konfession, bin geboren am 16. März 1882 zu Löwenberg i. Schles. als Sohn des Drahtwarenfabrikanten Ludwig Müth und seiner Ehefrau Luise, geb. Möschter. Von Ostern 1888 bis Ostern 1891 besuchte ich die Volksschule, darauf 6 Jahre das Realprogymnasium (jetzt Realschule) meiner Vaterstadt, das ich mit dem Einjährigen-Zeugnis Ostern 1897 verliess. Nachdem ich dann 3 Jahre dem Königl. Realgymnasium „König-Wilhelms-Schule“ zu Reichenbach i. Schl. als Schüler angehört hatte, bestand ich Ostern 1900 das Abiturientenexamen und bezog darauf die Universität Breslau, der ich bis jetzt ununterbrochen angehörte, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Am 1. Februar 1905 bestand ich das Doktorexamen.

Ich besuchte während meiner 10 Studiensemester die Vorlesungen, Uebungen und Seminare der Herren Professoren:

Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Hintze, Ladenburg, London, O. E. Meyer, Neumann, J. Partsch, Rosanes, Sturm.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders aber Herrn Prof. Sturm für die freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit, fühle ich mich zu tiefstem Dank verpflichtet.

Thesen.

1. Dem Ausspruch Jacobis, der einzige Zweck der Wissenschaft sei die Ehre des menschlichen Geistes, ist zuzustimmen.
2. Den Namen „Raum“ für mehr als dreifach ausgedehnte Grössen hält Reye (Crelles Journal, Bd. 107, S. 162) mit Recht für unglücklich gewählt, für verwirrend und irreleitend.
3. D'Alembert sagt einmal, die mathematischen Wahrheiten seinen gewissermassen die Asymptote der physikalischen. Dem muss man beipflichten.